

UNIVERZA V LJUBLJANI
EKONOMSKA FAKULTETA

DIPLOMSKO DELO

VASJA SIVEC

UNIVERZA V LJUBLJANI
EKONOMSKA FAKULTETA

DIPLOMSKO DELO

EMPIRIČNA ANALIZA VOLATILNOSTI BORZNIH DONOSOV

Ljubljana, avgust 2009

VASJA SIVEC

IZJAVA

Študent Vasja Sivec izjavljam, da sem avtor tega diplomskega dela, ki sem ga napisal pod mentorstvom dr. Igorja Mastena, in da dovolim njegovo objavo na fakultetnih spletnih straneh.

V Ljubljani, dne 10.08.2009

Podpis: _____

KAZALO VSEBINE

UVOD	1
1. FINANČNI TRGI.....	3
1.1 TRG LASTNIŠKIH VREDNOSTNIH PAPIRJEV	4
1.2 SLOVENSKI BORZNI TRG	4
1.2.1 <i>Indeks SBI20</i>	5
1.3 POPOLN TRG KAPITALA.....	6
1.4 UČINKOVIT TRG KAPITALA	6
2. ČASOVNE VRSTE IN MODELI ČASOVNIH VRST.....	8
2.2 STACIONARNOST	9
2.5 PRAKTIČEN PRIMER	10
3. OBLIKOVANJE STACIONARNE ČASOVNE VRSTE.....	1
3.1 DETERMINISTIČEN IN STOHASTIČEN TREND	1
3.2 DIFERENCE	2
4. DICKEY-FULLER TEST STACIONARNOSTI IN NJEGOVE IZVEDENKE.....	2
4.1 NAKLJUČNI HOD	2
4.2 DICKEY–FUELLER TEST	3
4.3 ENOTSKA REŠITEV	4
4.4 PRAKTIČEN PRIMER	6
5. MODELIRANJE SREDINE	7
5.1 AVTOREGRESIJSKI MODELI	8
5.2 MODELI PREMIKAOČEGA POVPREČJA	9
5.3 ARIMA MODELI.....	9
6. BOX-JENKINS METODOLOGIJA	10
6.1 PRAKTIČEN PRIMER	12
6.2 INFORMACIJSKI KRITERIJI	13
6.2.1 <i>Akaike in Bayesovski informacijski kriterij</i>	13
6.2.2 <i>Informacijski kriterij odklonskosti</i>	15
6.3 BELI ŠUM.....	16
6.4 PRAKTIČEN PRIMER	17
6.5 PORAZDELITEV OSTANKOV.....	18
6.5.1 <i>Asimetrija in sploščenost ostankov</i>	18
6.5.2 <i>Praktičen primer</i>	19
7. PSEVDO OZ. KVAZI METODA NAJVEČJEGA VERJETJA	20
8. KONSTANTNA VARIANCA OSTANKOV TER TEST LAGRANGEVEGA MULTIPLIKATORJA	21
8.1 PRAKTIČEN PRIMER	22
9. NESTANOVITNOST.....	22
9.1 VOLATILNOST	22
9.2 STILIZIRANA DEJSTVA	23
10. ARCH	24

10.1 PRAKTIČEN PRIMER	26
10.2 LASTNOSTI ARCH PROCESA	27
11. GARCH	28
12. OSTALE RAZLIČICE MODELOV DRUŽINE ARCH.....	29
12.1 ASIMETRIČNI GARCH MODELI	29
12.1.1 Nelsonov E-GARCH model	29
12.1.2 Pragovni GARCH modeli.....	31
12.1.3 Nelinearni ali potenčni GARCH model.....	31
12.2 MODELI DRUŽINE ARCH-T	32
13. CENILKE MODELOV	32
14. METODA NAJVEČJEGA VERJETJA	33
14.1 METODA NAJVEČJEGA VERJETJA V SPLOŠNI OBLIKI	34
14.2 PRIMER FUNKCIJE VERJETJA	35
14.3 IZRAČUN PARAMETROV	38
15. BAYES CENILKA.....	38
15.1 BAYESOV TEOREM.....	39
15.2 FUNKCIJA VERJETJA OZ. »LIKELIHOOD«.....	41
15.3 PRIORNA PORAZDELITEV OZ. »PRIOR«.....	41
15.3.1 Naravna konjugirana porazdelitev.....	42
15.3.2 Informativna priorna porazdelitev.....	42
15.3.3 Neinformativna priorna porazdelitev.....	42
15.4 ODNOS MED POSTERIORNO, PRIORNO PORAZDELITEVIJO IN FUNKCIJO VERJETJA	43
15.5 OCENJEVANJE Z BAYES CENILKO.....	44
15.5.1 Markova veriga	44
15.5.2 Gibbs-ov vzorčnik.....	45
15.5.3 Ocenjevanje posteriorne verjetnosti.....	46
16. NEKATERE RAZLIKE MED BAYES IN ML CENILKO.....	46
17. OCENJEVANJE NAPOVEDNE MOČI MODELOV.....	47
17.1 SIMETRIČNE MERE NAPAK	48
17.2 ASIMETRIČNE MERE NAPAK	49
18. TVEGANĀ VREDNOST.....	49
19. ANALIZA KONČNIH REZULTATOV IN PRIMERJAVA CENILK.....	51
19.1 POSTOPKOVNE IN METODOLOŠKE RAZLIKE	51
19.2 REZULTATI	52
19.2.1 Evolucija modelov.....	53
19.2.2 Primerjava informacijskih kriterijev.....	54
19.2.3 Primerjava ocenjenih vrednosti regresijskih koeficientov	54
19.2.4 Primerjava napovedne moči, RMSE	55
19.2.5 Primerjava napovedi tvegane vrednosti, VaR.....	59
19.2.6 Modeli ojačani s Studentovo t porazdelitvijo	60
SKLEP	61
LITERATURA IN VIRI	65

Kazalo slik

Slika 1: Avtokorelacijska funkcija vrednosti indeksa SBI20	1
Slika 2: Vrednost in donosnost borznega indeksa SBI20.....	6
Slika 3: Grafikoni avtokorelacijskih in delnih avtokorelacijskih funkcij simuliranih modelov.....	11
Slika 4: Avtokorelacijska in delna avtokorelacijska funkcija % donosov indeksa SBI20	13
Slika 5: Histogram ostankov modela MA(1) s konstanto	19
Slika 6: Avtokorelacijska in delna avtokorelacijska funkcija kvadratov ostankov MA(1) modela s konstanto....	26
Slika 7: Realizirane volatilnosti in napovedi pogojne variance najboljšega modela v zadnjem vzorcu	56
Slika 8: Donosoi indeksa SBI20 in izračunana tvegana vrednost najboljšega modela v zadnjem vzorcu	59
Slika 9: Realizirane volatilnosti in napovedi pogojne variance najboljšega modela v zadnjem vzorcu	61

Kazalo tabel

Tabela 1: Stanje na izbranih borzah v letu 2006	5
Tabela 2: Teoretični vzorci avtokorelacijske in delne avtokorelacijske funkcije.....	11
Tabela 3: Vrednosti BIC in AIC donosov indeksa SBI20.....	17
Tabela 4: Ranžirni vrsti informacijskih kriterijev glavnega vzorca, 24. dec. 2008 do 31. avg. 2009	54
Tabela 5: Nekatere ocene vrednosti regresijskih koeficientov.....	55
Tabela 6: Primerjava skladnosti informacijskih kriterijev z izvenvzorčnimi napovedmi najboljših modelov.....	56
Tabela 7: Primerjava napak izvenvzorčnih napovedi med metodama	57
Tabela 8: Primerjava napak izvenvzorčnih napovedi obeh metod, kadar so razlike med koeficienti velike	58
Tabela 9: Primer ocenjenih koeficientov glede na porazdelitev ostankov	60
Tabela 10: Primerjava napovedi modelov obeh metod z ostanki, porazdeljenimi v Studentovi t porazdelitvi	61

Uvod

Nedavni zlom trgov vrednostnih papirjev se je pričel v ZDA v torek, 16. septembra 2008. Kaj kmalu se je pokazalo, da posledic ne bodo trpeli zgolj investorji tamkajšnjih borz, temveč svet kot globalna celota. V Sloveniji je vdor že tako nesrečne finančne krize pospremilo še nekaj let trajajoče penjenje borznega trga. Pretirano optimistična pričakovanja (katerih posledica je bila skoraj 80 % rast borznega indeksa SBI20 v letu 2007) sta kaj kmalu izpodrinila pesimizem in medvedji trend. Obdobja, ki sledijo obratu srednjeročnega trenda, veljajo za najvolatilnejša. V teh obdobjih se izkaže, da so bile nedavne ocene izpostavljenosti tveganju močno podcenjene, pričakovanja se zasučejo in sledi prekonstruiranje portfeljev, ki ga spremljajo miljardne izgube (SBI20 je v letu 2008 izgubil skoraj 70 % svoje vrednosti).

Pričajoče diplomsko delo analizira nestanovitnost slovenskega delniškega trga. Vendar bistvo diplomske naloge ni v specifičnosti našega borznega trga, temveč v modeliranju in napovedovanju tveganosti. Predmet diplomske naloge je modeliranje tveganosti, ki jo v statistiki stohastičnih spremenljivk opišemo z varianco. Le-ta bo modelirana s pomočjo modelov družine ARCH, ki pa jih bomo ocenjevali s pomočjo dveh cenilk, prve klasične, po metodi največjega verjetja, in druge novejše, Bayesovske cenilke. Tako je popolnoma vseeno, ali bi za analizo izbrali tuji borzni trg ali celo časovno vrsto, ki ni povezana z ekonomsko in finančno vedo. Uporabljene metode predstavljajo presek ekonomske, statistične in matematične vede, koncepti pa so povsem splošne narave in so bili uspešno aplicirani tudi na drugih področjih (informacijska tehnologija, ekologija, medicina ...).

Tveganje ali volatilnost opišemo z varianco. Varianca stacionarne časovne vrste je konstantna, kar pa ne pomeni, da je pogojna varianca konstanta. Splošno z izrazom pogojna varianca označujemo varianco, definirano v časovnem trenutku in ne daljšem obdobju. Pogojna varianca se spreminja iz trenutka v trenutek, niha okoli vrednosti brezpogojne variance. Za pogojno varianco je značilno, da je kratkoročno odvisna od preteklih pogojnih varianc oziroma jo lahko napovedujemo na podlagi lastnih preteklih vrednosti. Pogojna varianca se »skupini«. Skupinjenje pogojne variance interpretiramo kot inercijo v tveganju. Praviloma tveganim obdobjem sledijo tvegana obdobja in obratno. V odsotnosti vzorca v gibanju pogojne variance, fenomena skupinjenja, bi bila pogojna varianca zgolj nenapovedljiva slučajna spremenljivka.

Ker se pogojna varianca skupini, izkazuje vzorec v gibanju, je do neke mere napovedljiva. Cilj diplomske naloge je s pomočjo ekonometričnih metod oblikovati in oceniti modele pogojne variance, ki nam bodo omogočili njen napovedovanje in s tem uravnavanje tveganja. Vendar pa je pogojna varianca neopazovana spremenljivka, kar pomeni, da o njej nimamo podatkov kot na primer o vrednosti borznega indeksa na določen dan. Problemu se je elegantno izognil R. Engels z vpeljavo ARCH modelov. Ti nam omogočajo modeliranje pogojne variance s pomočjo preteklih slučajnih odklonov pričakovane vrednosti spremenljivke od njene realizirane vrednosti. Orodje za merjenje pogojne variance torej imamo, ostane nam še vprašanje okolja, v katerem bomo merili pogojno varianco. Tu bomo za dosego cilja uporabili dva pristopa, klasičnega in novejšega Bayesovskega. Oba načina ocenjevanja parametrov modelov bomo nato soočili na dejanskih izvenzorčnih podatkih in skušali odgovoriti na vprašanje, kateri je primernejši.

Z diplomsko nalogo želimo najprej preveriti, ali je z ARCH modeli resnično mogoče napovedovati tveganost časovnih vrst. Zanima nas tudi, ali obstajajo razlike med

učinkovitostjo Bayesovske metode in metode največjega verjetja pri znotrajvzorčnih in zunajvzorčnih napovedih tveganosti časovnih vrst.

V prvem poglavju na kratko opredelimo pojem finančnih trgov, naš izvor podatkov. V naslednjem poglavju se s podatki seznanimo še s statističnega vidika, opredelimo časovne vrste. Časovna vrsta, ki jo bomo analizirali v tem diplomskem delu, se imenuje slovenski borzni indeks in nosi vse značilnosti običajnih finančnih časovnih vrst. Poudarek diplomske naloge je na eni sami značilnosti, ki je tako vsesplošno priznana, da je dobila svoje ime - nestanovitnost. Nestanovitnost opredelimo kot spremenjanje volatilnosti, ki je najpogosteje uporabljenha mera tveganja. Glavni cilj diplomske naloge je formirati model, s pomočjo katerega lahko uspešno napovedujemo tveganost.

Vendar pa do dobrega modela za napovedovanje tveganja ni mogoče priti v enem samem koraku. Korakov je kar nekaj in praviloma si poglavja diplomskega dela sledijo v logičnem zaporedju korakov, s pomočjo katerih prispemo do najboljšega modela. Vsak korak je najprej opisan s teoretičnega vidika in nato obravnavan na dejanskih podatkih.

Drugo poglavje oz. drugi korak razjasni pojem stacionarnosti časovne vrste. Le-ta je nujno potrebna, v kolikor želimo, da imajo naši podatki kakršnokoli uporabno vrednost. Zanimalo nas bo, kaj je to stacionarna časovna vrsta in kako obravnavati časovno vrsto, ki ni stacionarna.

Stacionarne časovne vrste posedujejo določene značilnosti, ki nam omogočajo modeliranje pojave. Oblikovanje stacionarne časovne vrste je predstavljeno v tretjem poglavju, njena preverba pa v četrtem poglavju. Dve najpogosteje obravnavani značilnosti časovne vrste, ki nam omogočata modeliranje pojave, sta njena sredina ali pričakovana vrednost ali, kot pravijo matematiki, njen prvi moment in varianca ali drugi moment ali, kot pravimo ekonomisti, in kar je osrednja tema te diplomske naloge - tveganje. Tveganja ne moremo modelirati brez dobro definirane sredine. Zato se peto in šesto poglavje osredotočata na zelo pogosto uporabljeni družino modelov pogojuh sredin, imenovano ARIMA modeli. S pomočjo ARIMA modelov lahko napovedujemo prihodnje vrednosti časovnih vrst in v primeru finančnih časovnih vrst so ARIMA modeli tesno povezani s hipotezo o učinkovitosti trgov kapitala. Zato je to poglavje zaokroženo s kratkim izletom na področje učinkovitosti trgov.

Ko si ogledamo in preizkusimo modele sredine, je čas, da se posvetimo osrednjemu delu diplomske naloge, to je modeliranju tveganosti. Modeli pogoju variance so relativno mladi modeli, leta 1982 jih je v ekonomski znanosti vpeljal R. Engels. Veljajo za enega pomembnejših prispevkov k ekonomski znanosti. Zanje je leta 1997 dobil Nobelovo nagrado za ekonomijo. Modeli pogoju variance družine ARCH imajo to sposobnost, da posnemajo določene splošne lastnosti finančnih časovnih vrst, imenujemo jih stilizirana dejstva. Deveto poglavje nam predstavi stilizirana dejstva, sledeče poglavje pa modele družine ARCH, ki so jih sposobni posnemati.

Ocenili bomo več modelov pogoju variance, za vsak izbrani podvzorec borznega indeksa SBI20 pet modelov. Le-ti nam bodo pozneje služili za preverjanje napovedne moči modelov. Preden pa preverimo napovedno moč modelov, si bomo v trinajstem poglavju ogledali, na kakšen način sploh lahko ocenimo parametre modelov.

Poglavlje 14 je namenjeno predstavitvi fleksibilne in najširše uporabljeni metode za ocenjevanje parametrov modelov, imenovane metoda največjega verjetja. Ogledali si bomo,

kako deluje metoda največjega verjetja in zakaj pravimo, da ta metoda maksimizira verjetnost podatkov.

Z razvojem računalniške tehnologije, predvsem večanjem moči procesorjev in delovnega spomina, je v zadnjih 15-ih letih postala aktualna nova metoda ocenjevanja parametrov modelov - Bayesovska metoda. Bayesovska metoda temelji na 200 let starem statističnem pravilu, ki pa je bilo do razvoja računalniške tehnologije zanemarjeno. Sčasoma se je pričela uveljavljati in še dandanes se v akademski sferi bijejo filozofsko teoretični boji o primernosti in učinkovitosti metode. Klasična ekonometrija, imenovana tudi frekventnostna ekonometrija, ne priznava subjektivnosti ocenjevalca, ki vstopa v Bayesovsko metodo. Bayesovski ekonometriki pa se branijo, da subjektivnost vstopa tudi v klasično ekonometrijo. V poglavju 15 si bomo ogledali prvine Bayesovske ekonometrije in kateri del je tisti, ki mu nasprotujejo klasični ekonometriki ter zakaj. V bistvu se metodi razlikujeta v temeljni predpostavki, in sicer klasična ekonometrija meni, da obstaja zgolj ena prava populacijska vrednost regresijskega parametra, nasprotno pa Bayesovska ekonometrija regresijski parameter obravnava kot slučajno spremenljivko. Podrobneje so razlike med metodama predstavljene v šestnajstem poglavju. V nadaljevanju si bomo ogledali, kako in s katerimi postopki na Bayesovski način ocenimo vrednosti koeficientov ter zakaj pravimo, da Bayesovska cenilka maksimizira verjetnost parametrov in ne podatkov.

Da pa teoretično razglašanje ne bi ostalo brez praktične vrednosti, smo modele, ocenjene s pomočjo metode največjega verjetja, ocenili še z Bayesovsko metodo. Poglavlja 17, 18 in 19 so namenjena predstavitvi ocenjenih vrednosti parametrov obeh metod ter analizi njunih enakosti ali razlik. Ker je bistvo modeliranja tveganja predvsem njegovo obvladovanje, je poglavje namenjeno tudi primerjavi uspešnosti obeh metod pri znotrajvzorčnem in zunajvzorčnem napovedovanju tveganosti. Pri tem pa poleg splošne povprečne mere natančnosti napovedi, t.j. povprečja kvadriranih napak, predstavljamo še praktično aplikacijo rezultatov v obliki tvegane vrednosti - VaR.

1. Finančni trgi

Pričajoče diplomsko delo obravnava nestanovitnost, specifično lastnost finančnih trgov. Finančni trgi omogočajo prenos prihrankov suficitnih celic, celic s finančnimi presežki, k deficitnim celicam, celicam s finančnim primanjkljajem.

»Prenos prihrankov« omogoča širok nabor vrednostnih papirjev in trgov, ki jih v grobem delimo glede na dospelost. Tako finančne trge delimo na denarne trge, kjer se trguje z vrednostnimi papirji z dospelostjo do enega leta, ter na trge kapitala, kjer se trguje z vrednostnimi papirji z dospelostjo nad enim letom.

Kapitalski trgi se nadalje delijo na trge, kjer se trguje z dolgoročnimi dolžniškimi vrednostnimi papirji in lastniškimi vrednostnimi papirji. V tej diplomski nalogi obravnavamo lastniške vrednostne papirje, ožje, delniške finančne trge. Slednji so predmet proučevanja diplomskega dela zaradi aktualnosti ter široke dostopnosti literature in podatkov. V zvezi z njimi obravnavamo njihovo lastnost, imenovano nestanovitnost. Vendar pa nestanovitnost ni lastnost zgolj delniških finančnih trgov, temveč tudi vseh preostalih finančnih trgov, kar

pomeni, da lahko obravnavane modele, metode in ugotovitve apliciramo tudi na druge finančne trge¹.

1.1 Trg lastniških vrednostnih papirjev

»Na trgu lastniških vrednostnih papirjev se trguje z delnicami. Delnica je lastniški vrednostni papir. Njen lastnik je lastnik dela kapitala podjetja, ki je izdal delnice. Delničarji nimajo zagotovljenega povračila glavnice niti obresti, imajo pa pravico do soodločanja v podjetju (www.ljse.si). Večinoma se na trgu delnic trguje z navadnimi delnicami, ki dajejo lastniku pravico do soodločanja v podjetju in pravico do sorazmernega deleža v dobičku podjetja. Sorazmerni delež dobička se lahko izplača neposredno v obliki dividend ali pa se v primeru zadržanja dobička le-ta ponavadi izrazi v višji ceni delnice. Obstajajo tudi prednostne delnice, katerih lastniki imajo pravico do vnaprej določene dividende, nimajo pa pravice soodločanja na skupščini. Dividende prednostnih delnic so lahko nižje ali višje kot dividende navadnih delnic in za njih velja prednostno izplačilo dividend.

1.2 Slovenski borzni trg

Ljubljanska borza d.d. je bila uradno ustanovljena 26. decembra 1989. Vendar njeni začetki segajo v leto 1924, ko je bila ustanovljena njena predhodnica, prva borza v Ljubljani. Na prvi borzi v Ljubljani se je trgovalo z državnimi dolžniškimi vrednostnimi papirji ter blagovnimi papirji podjetij. Žal je promet na prvi ljubljanski borzi zaradi druge svetovne vojne usahnil, z njim pa je ugasnila tudi borza.

Tri mesece po uradni ustanovitvi današnje Ljubljanske borze, dne 29. marca 1990, je potekal prvi borzni sestanek. Na njem je prisostvovalo vsega 14 borznih posrednikov, ki so trgovali z 11-imi vrednostnimi papirji. Z nastopom privatizacije se je slovenski borzni trg pričel poglabljati, povečala se je tržna kapitalizacija in dnevni promet.

Tržna kapitalizacija delnic na ljubljanski borzi je konec leta 2007 znašala 19.740 mio € in je predstavljala 58,9 % BDP Slovenije. V letu 2007 je bilo sklenjenih za 2.226,9 mio € poslov, od česar se 87,7 % poslov nanaša na delniške vrednostne papirje. Promet delnic prve kotacije predstavlja 62,1 % celotnega borznega prometa z delnicami.

¹ Še več - obravnavani modeli se npr. uporabljajo pri modeliranju prometa na računalniških strežnikih pri informatiki, napovedovanju izpustov CO₂ pri klimatologiji ... Bayesova cenilka pa je npr. temelj internetnih iskalnikov (Google, Yahoo, MSN search ...).

Tabela 1: Stanje na izbranih borzah v letu 2006

	Velika Britanija - London Stock Exchange	Nemčija - Frankfurt Stock Exchange	Slovenija - Ljubljana Stock Exchange
BDP (nom. mio €)	1.912.656	2.322.200	30.454
Tržna kapitalizacija (mio €)	2.876.986	1.241.963	11.513
Tržna kap. (% BDP)	150 %	54 %	38 %
Promet (mio €)*	5.990.492	2.164.847	1.451
Promet (% BDP)	313 %	93 %	5 %
Št. opravljenih poslov*	94.799.535	109.018.192	167.139
Št. kotirajočih podjetij*	3.256	760	100
EBIT (1000 €)	257.015	1.027.500	515
EBIT (% prometa)	0,004 %	0,05 %	0,04 %
Obrat	2,08	1,74	0,13

*Vključeno je le trgovanje z delnicami preko elektronskega naročanja ter dogovorjenih poslov (izključujuč dolžniške vrednostne papirje, derivative, točke odprtih in delnice zaprtih vzajemnih skladov).

VIR: Zveza evropskih borz, European Exchange Report 2006, b.l..

V primerjavi s frankfurtskim in londonskim borznim trgom je ljubljanski nerazvit. V letu 2006 je tržna kapitalizacija ljubljanske borze dosega zgolj 38 % BDP, medtem ko le-ta na londonski borzi znaša kar 150 %. Potrebno pa je poudariti, da tržna kapitalizacija borze v Londonu vsebuje tudi tuja podjetja, ki kotirajo na tej borzi, medtem ko na borzi v Frankfurtu (tu tržna kapitalizacija znaša 54 % BDP) kotirajo večinoma delnice domačih podjetij. Največ podjetij kotira na borzi v Londonu (3.256 podjetij), ki ima tudi najvišji obrat delnic (2,08 kratnik tržne kapitalizacije). Sledita borza v Frankfurtu (760 podjetij in 1,74 kratnik tržne kapitalizacije) ter slovenska borza (100 podjetij in 0,13 kratnik tržne kapitalizacije). Iz navedenih podatkov sledi, da je najgloblja ter najbolj likvidna borza v Londonu, nekje vmes se nahaja borza v Frankfurtu, najmanj likvidna ter plitka borza pa je Ljubljanska borza. Slovenski kapitalski trg je nerazvit trg. O podjetjih, ki kotirajo na naši borzi, je na voljo manj informacij kot o podjetjih, ki kotirajo na londonski in frankfurtski borzi. Vsakodnevne cene vrednostnih papirjev slabše odsevajo vrednosti podjetij, zato lahko pričakujemo, da je trg tudi manj učinkovit.

Manj učinkovit trg praviloma vsebuje več vzorcev, ki omogočajo napovedovanje cen vrednostnih papirjev. Ker je ljubljanski borzni trg nerazvit, lahko pri modeliranju pričakujemo statistično značilne modele sredine in močno nestanovitnost, z drugimi besedami prisotnost ARCH učinka (glej poglavje Stilizirana dejstva).

1.2.1 Indeks SBI20

Delniški indeks SBI20 objavlja Ljubljanska borza d.d. vse od 31. 12. 1993. Istega dne je bila prvič objavljena njegova izhodiščna vrednost, ki je znašala 1000 enot. Indeks prikazuje povprečno gibanje cen vrednostnih papirjev na Ljubljanski borzi. Povprečje je določeno s pomočjo tehtanja cen delnic podjetij, kjer utež predstavlja tržna kapitalizacija podjetja. Trenutno vsebuje redne delnice 15-ih podjetij prostega in borznega trga. SBI20 vsebuje največe ter najbolj likvidne delnice slovenskega borznega trga. Izbrane so na podlagi treh merit: tržne kapitalizacije, povprečnega dnevnega prometa ter povprečnega dnevnega števila

poslov. Revizija indeksa poteka polletno, marca in septembra. Vsakega prvega marca se na podlagi kazalnikov za preteklih 12 mesecev določi sestavo indeksa ter septembra po potrebi prilagodi. Delnice, vključene v indeks SBI20, so dne 24. 6. 2008 zavzemale 75 % delež v tržni kapitalizaciji vseh delnic na Ljubljanski borzi. Delniški indeks SBI20 je predstavnik gibanja cen delnic slovenskega borznega trga.

1.3 Popoln trg kapitala

Trg kapitala ni primarni vir financiranja podjetij. Podjetja se primarno financirajo preko dolžniških instrumentov in večinoma preko bančnega sistema, kot pojasnjujejo Mishkinove uganke. To dejstvo teorija razlaga s pomočjo asimetrije informacij ter z njenimi posledicami, moralnim hazardom, narobe izbiro in transakcijskimi stroški. Neposredno z asimetrijo informacij je povezan pojem popolnosti kapitala in hipoteza o učinkovitosti trga kapitala.

Trg kapitala je popoln, kadar velja (Mramor, 2001, str. 21):

1. Trg kapitala deluje brez trenj, kar pomeni, da:

- ni transakcijskih stroškov,
- ni stroškov stečaja in drugih stroškov finančne stiske,
- ne obstajajo stroški v zvezi z različnimi lastniki podjetja in menedžerji, torej ni stroškov agentov,
- ni davkov,
- ne obstaja zakonodaja, ki bi omejevala prosto delovanje trga, zato imajo vsi ekonomski subjekti enakopraven dostop do trga kapitala in
- so vsa sredstva popolnoma deljiva in se prodajajo ter kupujejo na trgu kapitala.

2. Na trgu kapitala je popolna konkurenca, kar pomeni, da so za vsak posamezni ekonomski subjekt, ki na tem trgu deluje, cene vrednostnih papirjev dane.

3. Trg je informacijsko učinkovit, kar pomeni, da ni informacijskih stroškov oz. da vsi udeleženci na trgu kapitala sočasno dobivajo vse informacije.

4. Vsi udeleženci na trgu kapitala se obnašajo racionalno, in sicer sprejemajo takšne poslovne odločitve, ki maksimirajo njihovo koristnost.

Pravimo da je popoln trg kapitala učinkovit. Torej dobro opravlja svojo vlogo. Na popolnem trgu kapitala so cene delnic nenapovedljive. V kolikor bi bile cene delnic na realnih trgih popolnoma nenapovedljive, bi bilo modeliranje trga nesmiselno. Seveda pa popoln trg kapitala ne obstaja, saj so pogoji, ki ga določajo, preveč omejevalni. Vendar to ne pomeni, da trg kapitala ni nujno učinkovit oz. dobro opravlja svojo vlogo, navkljub nekaterim pomankljivostim.

1.4 Učinkovit trg kapitala

Torija o učinkovitosti trgov kapitala pravi (Fama, 1970, str. 385), da je trg kapitala učinkovit, kadar na njem na dolgi rok ni mogoče dosegati nadpovprečnih donosov. Na učinkovitem trgu kapitala so namreč vrednostni papirji ocenjeni tako, da odsevajo vse relevantne razpoložljive informacije, zato cena vrednostnega papirja odraža njegovo pravo vrednost.

Učinkovitost trgov kapitala proučujemo s treh vidikov: alokacijske, transakcijske in informacijske učinkovitosti. Alokacijska učinkovitost proučuje, ali je kapital z vidika družbene blaginje alociran v optimalne namene (glede na tveganje in donos). Transakcijska učinkovitost se nanaša na stroške in tveganja pri posredovanju finančnih virov na kapitalskih trgih, informacijska učinkovitost pa proučuje vlogo informacij na kapitalskih trgih.

Za temo diplomske naloge je pomembna predvsem informacijska učinkovitost trgov kapitala. Informacijsko učinkovit trg kapitala je trg, kjer cene vrednostnih papirjev vedno in v celoti odsevajo vse pretekle in trenutno razpoložljive relevantne informacije.

Fama (1970, str. 383) izpostavi tri vrste informacijske učinkovitosti trgov kapitala. Hipoteza o šibki učinkovitosti pravi, da na podlagi preteklih cen vrednostnih papirjev ni mogoče dosegati nadpovprečnih tržnih donosov. Hipoteza o srednje močni učinkovitosti pravi, da nadpovprečnih donosov ni mogoče dosegati na podlagi preteklih in trenutnih javno dostopnih informacij. Močna oblika pa pravi, da nadpovprečnih donosov ni moč dosegati na podlagi katerihkoli informacij, tudi nejavnih-internih informacij. Večina študij potrjuje hipotezo o šibki učinkovitosti trga kapitala ter srednji učinkovitosti trga kapitala. Močne hipoteze o učinkovitosti trgov kapitala praviloma ni mogoče preizkusiti.

Ker cene vrednostnih papirjev že vsebujejo vse relevantne informacije, so njihove spremembe lahko zgolj posledica novih informacij. Dotok novih informacij investitorji hipno vgradijo v ceno vrednostnega papirja. Tako nova informacija v trenutku postane stara informacija. Že naslednji trenutek je za investitorja neuporabna. Spremembe cen vrednostnih papirjev so predvsem posledica novih informacij, ki pa so naključne in neodvisne od starih informacij. Na informacijsko učinkovitem trgu kapitala ni mogoče napovedovati cen vrednostnih papirjev. Stare informacije so že vgrajene v cene vrednostnih papirjev, nove informacije pa so naključne, nenapovedljive.

Hipotetični primer vrednostnega papirja, kjer je cena odvisna zgolj od novih informacij, predpostavlja, da se slučajna napaka kot strežnik za nove informacije porazdeljuje neodvisno z aritmetično sredino enako nič ter konstantno varianco²:

	$P_t = P_{t-1} + \varepsilon_t$ $\varepsilon_t \sim i.i.d.(0, \sigma^2)$	(1)
--	--	-----

Ker so nove informacije naključne in neodvisne, bi morale biti spremembe cen naključne spremenljivke, statistično neodvisne ena od druge oziroma bi morale biti porazdeljene neodvisno in identično. Časovno vrsto neodvisnih in identično porazdeljenih spremenljivk imenujemo beli šum (glej poglavje Beli šum).

V kolikor obvelja srednje močna hipoteza o učinkovitosti trgov kapitala, to pomeni, da so spremembe cen vrednostnih papirjev rezultat zgolj novih naključnih informacij. Ker so nove naključne informacije porazdeljene neodvisno in identično, je proces, ki generira cene vrednostnih papirjev, v osnovi naključni hod. Posledično ne moremo modelirati sredine, t.j. pričakovane cene vrednostnega papirja. Kot bomo videli v nadaljevanju, pa za slovenski borzni trg (kot tudi za vse tuje borzne trge) obstajajo statistično značilni modeli pričakovanih

² Navedeni model imenujemo model naključnega hoda (ang. *Random Walk Model*), opisan je v poglavju Naključni hod.

cen vrednostnih papirjev, na podlagi katerih bi pod določenimi pogoji lahko dosegali nadpovprečne donose.

Ne pozabimo, da so predpostavke zelo omejujoče. V praksi je mogoče napovedati prihodnjo ceno vrednostnega papirja, vendar pa trg kapitala ostaja učinkovit. Bistvo se skriva v transakcijskih stroških. Kljub temu da lahko napovemo prihodnjo ceno vrednostnega papirja, na podlagi te informacije ni mogoče zaslužiti zaradi transakcijskih stroškov. Govorimo o konceptu poštene igre³, ki pravi, da je trg učinkovit, kadar na podlagi vseh razpoložljivih informacij ne moremo kovati nadpovprečnih dobičkov. Takšen je tudi primer slovenskega borznega trga.

Prekomerna nestanovitnost je značilnost trgov, kjer cene niso oblikovane na podlagi racionalnih pričakovanj (npr. merjeno z razkorakom med nihajnostjo cen delnic, ocenjenih po metodi diskontiranih dividendnih pritokov⁴ in dejanskih cen delnic). Cene niso oblikovane na podlagi racionalnih pričakovanj, ker trg ne ponuja dovolj informacij za oblikovanje takšnih pričakovanj. Bulkley in Harris (1997, str. 370) pravita, da zaradi informacijske neučinkovitosti trgov, pričakovanja investitorjev nihajo prekomerno in pojavi se presežna, s temeljnimi dejavniki neutemeljena nestanovitnost.

2. Časovne vrste in modeli časovnih vrst

»Časovna vrsta je niz istovrstnih podatkov, od katerih se vsak nanaša na zaporedne časovne razmike ali zaporedne časovne trenutke.« (Arh & Pfajfar, 2004, str. 219) Da bi bila ekonometrična analiza časovne vrste pravilna, je potrebno podatke v časovni vrsti poenotiti in kvantificirati. Večina finančnih časovnih vrst, ki so na voljo za analizo na spletu, je že poenotenih in so kvantitativne narave. Takšna je tudi časovna vrsta, ki jo v diplomske nalogi analiziramo, t.j. SBI20- indeks slovenskega borznega trga.

Ekonometrična analiza časovnih vrst je dinamična analiza, analiza pojava skozi čas. Z njenim pomočjem analiziramo, kako in zakaj se je pojav spremenjal skozi čas, ter bolj ali manj uspešno predvidimo, kakšno bo gibanje pojava v prihodnosti. Pri tem sklepamo, da je časovna vrsta zgolj realizacija nekega naključnega procesa, ki generira podatke nekje v ozadju ter ga ne moremo neposredno opazovati. Opazujemo lahko samo njegove posledice, realizacije. Podatki, ki smo jih zabeležili, so nastali v točno določenih okoliščinah in jih je ustvaril proces, ki je skrit očem. Imenujemo ga proces generiranja podatkov⁵. Na podlagi realizacij procesa, kar zabeleženi podatki so, nato sklepamo o procesu samem, ki je sicer očem neviden. Modelirati smo zmožni zgolj njegove najočitnejše lastnosti, kot je npr. odnos med dvema zaporednima vrednostima, ki jih generira.

Če časovno vrsto kompaktno označimo kot:

$$\{y_t\}_1^T \quad (2)$$

je y_t opazovana vrednost v časovni vrsti v trenutku t , pri čemer spremenljivka t predstavlja čas, ki se nahaja na intervalu od 1 do T . Proses, ki generira podatke, pa je družina/skupek

³ Ang. *Fair Game Efficiency*.

⁴ Ang. *Dividend Discount Model*.

⁵ Ang. *Data Generating Process*.

naključnih spremenljivk Y_t (izmed katerih ima vsaka svojo verjetnostno porazdelitev), ki so definirane na neskončnem verjetnostnem prostoru:

$$\{Y_t\}_{-\infty}^{\infty} \quad (3)$$

Zaradi praktičnih razlogov privzamemo, da je proces, ki generira podatke, definiran zgolj na istem prostoru kot naše opazovane vrednosti.

Obenem predpostavimo, da opazovane vrednosti y_t hkrati predstavljajo kar proces sam. Npr. proces, ki generira ceno vrednostnega papirja, je sestavljen iz množice mnenj in pričakovanj, na katere vpliva nešteto dejavnikov (od izračunane tržne bete, pa vse do vremenskih vplivov in hormonov). Seveda je v analizo nemogoče vključiti vse te dejavnike. Še več, pri analizi smo tako zelo omejeni⁶, da skušamo proces generiranja cene modelirati zgolj na podlagi preteklih cen vrednostnega papirja. Privzamemo torej, da je omenjena časovna vrsta kar proces sam.

S statističnega vidika je cilj tega diplomskega dela s pomočjo analize časovnih vrst formirati ustrezne verjetnostne modele, ki kar najbolje opišejo podatke in proces, ki jih je generiral. Skušali bomo opisati model časovne vrste opazovanih podatkov oz. realizacij y_t , indeksa SBI20 kot skupno porazdelitev zaporedja naključnih spremenljivk Y_t . Osredotočili pa se ne bomo zgolj na prve momente verjetnostnih porazdelitev, torej pričakovane vrednosti Y_t , temveč tudi na druge momente verjetnostne porazdelitve, varianco oz. razpršenost spremenljivke.

V nadaljevanju se zaradi enostavnosti izraz časovna vrsta nanaša tako na realizacije procesa, ki generira podatke, kot na proces sam. Poenostavitev je moč zaslediti tudi v drugi literaturi, na primer pri Brockwellu (1996, str. 6) in Millsu (2002, str. 8).

2.2 Stacionarnost

Da bi lahko ocenili model nekega procesa generiranja podatkov, moramo zaradi pomanjkanja števila opazovanj sprejeti določene predpostavke. Predpostavki o ergodičnosti in stacionarnosti sta dve izmed takšnih predpostavk.

Pravimo, da je proces šibko stacionaren, kadar so njegovi prvi in drugi momenti porazdelitve neodvisni od časa. Povedano drugače, proces je šibko stacionaren, kadar sta njegova pričakovana vrednost (sredina) in razpršenost (varianca) konstantni, vrednost kovariance med dvema časovnima obdobjema pa je odvisna zgolj od razdalje med časovnima obdobjema in se skozi čas ne spreminja. Zapisano z matematičnimi simboli (Gujarati, 2003, str. 713):

$$\begin{aligned} E(y_1) &= \dots = E(y_T) = \mu \\ Cov(y_t, y_{t-k}) &= \text{const.} \quad \text{za vsak } k \neq 0 \\ k = 0 \rightarrow Var(y_1) &= \dots = Var(y_T) = \sigma^2 \end{aligned} \quad (4)$$

⁶ Razlogov je neskončno: manjkajoči podatki o pojavu samem ter drugih spremenljivkah, ki ga določajo, nezadostna računalniška moč, premalo teoretičnega znanja, slabo poznavanje pojava ...

Proces je strogo stacionaren⁷, kadar na njegovo porazdelitev čas ne vpliva. To pomeni, da je skupna verjetnostna porazdelitev spremenljivk, ki sestavljajo proces, popolnoma enaka v vseh momentih porazdelitve, tako v obdobjih znotraj vzorca (t_1, \dots, t_T) kot tudi v obdobjih zunaj vzorca (t_{1+k}, \dots, t_{T+k}). Skupna verjetnostna porazdelitev je popolnoma neodvisna od časa.

Da lahko časovno vrsto modeliramo z običajnimi modeli in cenilkami, mora biti le-ta vsaj šibko stacionarna. Nihati mora enakomerno okoli konstantne sredine. Ekonomski časovni vrste so le redko stacionarne. Večinoma so nestacionarne, se ne vračajo k svojim srednjim vrednostim in ne nihajo enakomerno (npr. izkazujejo trend, zaradi strukturnih premikov se spremeni njihova sredina, njihova volatilnost niha skozi čas ...).

2.5 Praktičen primer

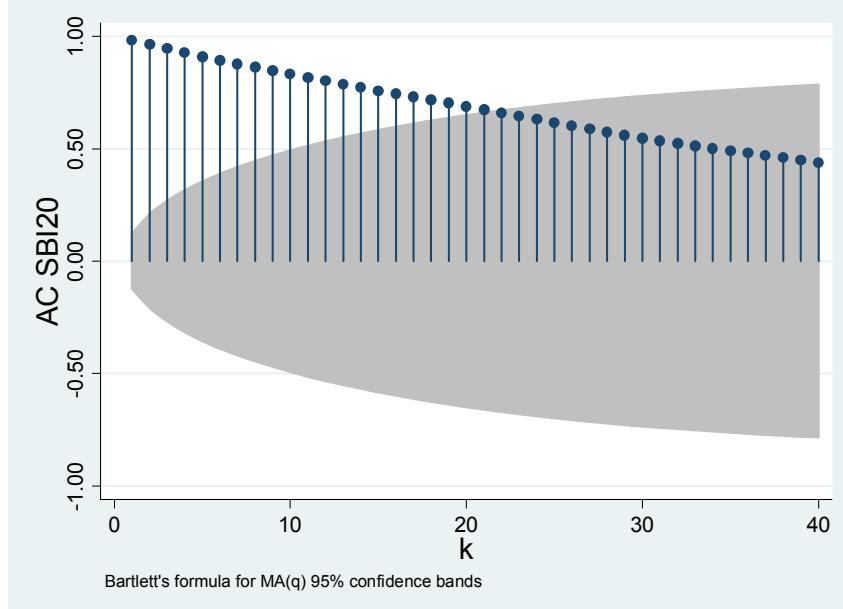
Iz Slike 2 na str. 6 je moč sklepiti, da indeks SBI20 skoraj zagotovo ni stacionaren. Indeks se ne vrača k neki fiksni srednji vrednosti, temveč izkazuje negativen trend.

Iz avtokorelograma vrednosti indeksa SBI20 je razvidno, da je avtokorelacija med podatki zelo visoka (večja od 0,9) in prisotna celo po dvajsetem odlogu (glej Sliko 1). Avtokorelacija med odlogi popolnoma naključnega procesa je po definiciji enaka nič (več o avtokorelacijski v Prilogi 16). Visoka in vztrajna avtokorelacija tudi pri velikih odlogih kaže znak, da časovna vrsta ni stacionarna. Kot graf indeksa SBI20 nam tudi slika avtokorelograma namiguje, da časovna vrsta ni stacionarna. Tudi s testi na podlagi Q statistike (več o uporabi Q statistike v Prilogi 17), ki preverja domnevo, ali so vsi avtokorelacijski koeficienti hkrati enaki nič, lahko potrdimo prisotnost avtokorelacije v časovni vrsti vrednosti indeksa SBI20 (glej Tabelo 1 v Prilogi 1).

Obravnavani vzorec vrednosti indeksa SBI20 očitno ni stacionarna časovna vrsta. Modeliranje takšne časovne vrste bi bilo neplodno početje. Posledice so odvisne od narave nestacionarnosti, najpogosteje pa so sledeče: testi regresijskih koeficientov niso veljavni, napovedi prihodnjih vrednosti so pristranske in pripadajoči intervali zaupanja ponavadi preširoki.

⁷ Ang. *Strictly Stationary*.

Slika 1: Avtokorelacijska funkcija vrednosti indeksa SBI20, 24. dec. 2007 – 31. dec. 2008



Vir: Podatkovna baza Ljubljanske borze, 2009.

3. Oblikovanje stacionarne časovne vrste

V tem poglavju se posvečamo vprašanju, kako nestacionarno časovno vrsto preoblikovati v stacionarno. K testom stacionarnosti se bomo vrnili pozneje, v poglavju, ki se posveča popularni družini modelov časovnih vrst. Družini ARIMA modelov (glej poglavje ARIMA modeli). Pojem stacionarnosti ima namreč močan vpliv na lastnosti teh modelov.

Finančne časovne vrste niso stacionarne, navadno vsebujejo vsaj trend. Torej se vsaj njihova pričakovana vrednost skozi čas z dodajanjem novih podatkov spreminja. Vsebujejo inercijo, ki jih sili k obdobjem rasti ali padanja. Omenjena lastnost je skupna skoraj vsem nepreoblikovanim časovnim vrstam. Ne vsebuje pa vsaka časovna vrsta enakega trenda. Vrsta trenda določa način preoblikovanja časovne vrste v stacionarno časovno vrsto.

3.1 Determinističen in stohastičen trend

Večino ekonomskih časovnih vrst, in borzni indeksi niso izjema, izkazuje trendno gibanje. Trend je vztrajno dolgoročno gibanje spremenljivke v odvisnosti od časa. Obstajata dve vrsti trenda, determinističen in stohastičen trend. Determinističen trend je nenaključna funkcija časa. Determinističen trend je popolnoma oz. skoraj popolnoma napovedljiv skozi čas. Prisotnost determinističnega trenda preverimo tako, da regresijskemu modelu dodamo spremenljivko čas (Gujarati, 2003, 723):

$$y_t = \alpha_0 + \alpha_1 t + \varepsilon_t \quad (5)$$

$$\varepsilon_t \sim i.i.d.(0, \sigma^2)$$

Do 80-ih let je veljalo, da je moč vpliv trenda v časovni vrsti odpraviti s pomočjo vključitve časa v regresijsko enačbo. Nato pa so raziskovalci ugotovili, da je izničenje trenda s pomočjo časa najprimernejša rešitev le, kadar je trend determinističen (Gujarati, 2003, str. 722).

Kadar pa je trend v časovni vrsti stohastične narave, uporabimo diference časovne vrste. Pravimo, da je časovna vrsta diferenc (razlik) stacionarna, kadar (Gujarati, 2003, str. 723):

$$\begin{aligned} y_t - y_{t-1} &= \alpha + \varepsilon_t \\ \varepsilon_t &\sim i.i.d.(0, \sigma^2) \end{aligned} \quad (6)$$

Je α konstanta in ε_t slučajna spremenljivka z aritmetično sredino enako nič in konstantno varianco σ^2 . Takšen proces je stacionaren v differencah⁸⁹.

3.2 Diference

Trend v časovni vrsti izločimo s pomočjo transformacije, preoblikovanja časovne vrste. Časovna vrsta, ki vsebuje stohastičen/naključen trend, postane stacionarna, v kolikor jo transformiramo v njene diference oz. razlike. Vrednosti v spremenjeni časovni vrsti ali diference izračunamo na sledeč način:

$$\Delta y_t = y_t - y_{t-1} \quad (7)$$

Ker je uporaba diferenc v povezavi s stacionarnostjo pri analizi časovnih vrst tako pogosta, se je v povezavi z njo uveljavila posebna terminologija. V kolikor je časovna vrsta prvih differenc (Δy_t) stacionarna, pravimo, da je prvotna časovna vrsta (y_t) integrirana reda 1, zapisano s simboli: $I(1)$. Redkeje moramo vrsto diferencirati večkrat. Red nam pove, kolikokrat moramo diferencirati časovno vrsto, da bi postala stacionarna. Časovna vrsta reda k je stacionarna, $I(k)$, kadar jo moramo diferencirati k -krat¹⁰.

Enake učinek dosežemo tudi z uporabo relativne rasti spremenljivke:

$$\frac{\Delta y_t}{y_t} = \frac{y_t - y_{t-1}}{y_t} \quad (8)$$

4. Dickey-Fuller test stacionarnosti in njegove izvedenke

Formalnejši test, ki preverja domnevo o stacionarnosti, sta leta 1979 razvila Dickey in Fuller. Z Dickey-Fueller testom preverimo domnevo o prisotnosti trenda nasproti domnevi, da je časovna vrsta stacionarna.

4.1 Naključni hod

Njun test temelji na modelu trenda, ki ga imenujemo naključni hod¹¹. Naključni hod je popolnoma naključen proces. Če je nek proces popolnoma naključen, ga ni mogoče napovedati. Najboljša napoved prihodnje vrednosti naključnega procesa (npr. y_{t+1}) bi bila kar

⁸ Zaradi enostavnosti smo na tem mestu uporabili diferenco prvega reda.

⁹ Ang. *Difference Stationary*.

¹⁰ Načeloma diference višjega reda niso zaželene, ker jih je vsebinsko težje interpretirati, obenem pa z diferenciranjem izgubljamo število opazovanj.

¹¹ Ang. *Random Walk*.

današnja vrednost (y_t), saj je vsak odklon (ε_t) od današnje vrednosti (y_t) popolnoma naključen in nenapovedljiv¹². Enostaven naključni hod ima sledečo obliko:

$$\begin{aligned} y_{t+1} &= y_t + \varepsilon_t \\ \varepsilon_t &\sim i.i.d.(0, \sigma^2) \end{aligned} \quad (9)$$

Naključni hod je nestacionaren proces. Ker se slučajna napaka ε_t porazdeljuje neodvisno ozziroma ni korelirana s svojimi preteklimi vrednostmi, velja (Enders, str. 167):

$$E(y_t) = E\sum_1^t \varepsilon_i = t\varepsilon_t \quad (10)$$

$$\text{var}(y_t) = \text{var}\left(\sum_1^t \varepsilon_i\right) = t\sigma_\varepsilon^2 \quad (11)$$

Pričakovana vrednost in varianca naključnega hoda sta odvisni od časa. Takšen proces očitno ni stacionaren. Omenimo še, da naključni hod ni stacionaren proces, vendar pa je njegova prva diferenca popolnoma naključen in stacionaren proces.

4.2 Dickey–Fueller test

Dickey–Fuller test uporabi model naključnega hoda¹³ za preverbo stacionarnosti časovne vrste. Najenostavnejši primer testa uporabi avtoregresijski model prvega reda sledeče oblike (Gujarati, 2003, str. 718):

$$\begin{aligned} y_{t+1} &= \alpha_1 y_{t-1} + \varepsilon_t \\ \varepsilon_t &\sim i.i.d.(0, \sigma^2) \end{aligned} \quad (12)$$

Kjer α_1 predstavlja vpliv pretekle vrednosti spremenljivke na njen sedanjo vrednost. V kolikor je vrednost α_1 ena 1, enačba predstavlja naključni hod, za katerega iz enačb (10) in (11) vemo, da je nestacionaren.

Ničta hipoteza Dickey–Fuller testa trdi, da je $\alpha_1 = 1$, proces je nestacionaren. Vendar pa pri preverjanju hipoteze ne moremo uporabiti običajne t-statistike, saj se izkaže, da je pristranska¹⁴. Zato sta Dickey in Fuller (1979, str. 427-431) model izrazila v drugačni obliki in na podlagi Monte Carlo simulacij izračunala nove kritične vrednosti t-statistike imenovane τ (tau) statistika:

$$\begin{aligned} \Delta Y_t &= f(t) + (\alpha_1 - 1)Y_{t-1} + \varepsilon_t \\ H_0 : \alpha_1 - 1 &= 0 \quad H_1 : \alpha_1 - 1 < 0 \end{aligned} \quad (13)$$

Kjer $f(t)$ predstavlja deterministično funkcijo časa in lahko zavzame različne oblike:

¹² V primeru popolnosti trga kapitala bi cene vrednostnih papirjev opisali z modelom naključnega hoda.

¹³ Naključni hod se v strokovni literature imenuje tudi nestacionarna časovna vrsta, ki vsebuje enotsko rešitev (ang. *Unit Root Nonstationary Time Series*).

¹⁴ Kadar je proučevana časovna vrsta dejansko nestacionarna, t test konsistentno zavrača ničelno hipotezo.

$$\begin{aligned}
f(t) &= 0 - \text{enostavni naključni hod} \\
f(t) &= c_0 - \text{naključni hod s trendom} \\
f(t) &= c_0 + c_1 t - \text{naključni hod z linearnim deterministicim trendom}
\end{aligned}$$

Test lahko »ojačamo« tako, da med pojasnjevalne spremenljivke dodamo višje odloge spremenljivke y_t , npr. y_{t-2} , pri čemer želimo doseči, da slučajne napake ε_t postanejo neodvisne in identično porazdeljene (i.i.d., več o tem v poglavju Beli šum¹⁵). Takšen test imenujemo »ojačan Dickey-Fuller test¹⁶«:

$$\begin{aligned}
\Delta Y_t &= f(t) + (\alpha - 1)Y_{t-1} + \sum_i^p a_i \Delta Y_{t-i} + \varepsilon_t \\
H_0 : \alpha - 1 &= 0 \quad H_1 : \alpha - 1 < 0
\end{aligned} \tag{14}$$

Sodobni računalniški programi povečini poročajo t -statistiko, ki jo je nekoliko izboljšal MacKinnon (1991, pog. 13).

4.3 Enotska rešitev

Dicky-Fuller test stacionarnosti je med praktiki poznan tudi kot test enotske rešitve korena¹⁷. Razlog je preprost. Vemo, da je enostavni naključni hod imenovan tudi avtoregresijski model prvega reda z $\alpha_1 = 1$, nestacionaren (glej poglavje Naključni hod). Izrazimo naključni hod v nekoliko drugačni obliki, obliki diferenčne enačbe:

$$Y_t = \alpha_1 Y_{t-1} + \varepsilon_t \tag{15}$$

$$Y_t - \alpha_1 Y_{t-1} = \varepsilon_t \tag{16}$$

$$(\alpha_0 L^0 - \alpha_1 L^1) Y_t = \varepsilon_t \tag{17}$$

oz. kompaktnejše

$$\alpha(L) Y_t = \varepsilon_t \tag{18}$$

L se imenuje operator odloga in je takšna funkcija, ki vrednost spremenljivke v času t (y_t) prevede v vrednost spremenljivke v času $t-1$ (y_{t-1}):

$$\begin{aligned}
(L)^p y_t &= y_{t-p} \\
\text{oz.} \\
Ly_t &= y_{t-1}
\end{aligned} \tag{19}$$

¹⁵ Želimo resnično naključne napake, kar pomeni, da je njihova srednja vrednost enaka nič, varianca konstantna in avtokorelacija med njimi enaka nič ne glede na odlog.

¹⁶ Ang. *Augmented Dickey-Fuller Test*.

¹⁷ Ang. *Unit Root Test*.

S pomočjo operatorja odloga¹⁸ smo gornjo funkcijo (15) spremenili v polinom odlogov¹⁹(17 oz. 18). Predstavljen je polinomom prvega reda, vendar se ugotovitve nanašajo na polinom kateregakoli reda. Koncept, tesno povezan z reševanjem polinomskeih enačb, se imenuje obratna karakteristična enačba²⁰. Obratna karakteristična enačba je enačba, katere rešitve (te rešitve imenujemo tudi »ničle polinoma²¹«) polinom izenačijo z nič:

$$a(\lambda) = 0 \quad (20)$$

Gornji izraz predstavlja obratno karakteristično enačbo enačbe (17). Iščemo torej »ničlo polinoma« (λ_1):

$$1 - \alpha_1 \lambda_1 = 0 \quad (21)$$

V našem enostavnem primeru je rešitev obratne karakteristične enačbe enaka:

$$\lambda_1 = 1/\alpha_1 \quad (22)$$

Avtoregresijski model prvega reda, in torej tudi časovna vrsta, ki jo model posnema, je stacionaren, kadar velja, da je absolutna vrednost ničle polinoma (rešitve obratne karakteristične enačbe) večja od 1:

$$|\lambda_1| > 1 \Rightarrow \alpha_1 < 1 \quad (23)$$

Kadar je absolutna vrednost ničle polinoma večja od ena, je vrednost regresijskega koeficiente α_1 strogo manjša od ena. Vemo, da je naključni hod (kadar je $\alpha_1=1$) nestacionarna vrsta. Še huje se godi časovni vrsti, katere regresijski koeficient α_1 zavzame vrednost večjo od ena. Takšna časovna vrsta je še očitnejše nestacionarna, pravzaprav je eksplozivna in še hitreje »odtava« od svoje kratkoročne srednje vrednosti²². Praktično to pomeni, da vpliv preteklih vrednosti časovne vrste na sedanje vrednosti nikoli ne zamre. Na prihodnje vrednosti vplivajo aditivno, od tod tudi nestacionarnost, eksplozivnost in visoka ter močna avtokorelacija, prisotna v takšni časovni vrsti (prirejeno po Stock & Watson, 2003, str. 464).

V kolikor bi imeli opravka s polinomi višje stopnje (kadar regresijski model vsebuje odloge višjega reda (p), torej pri ojačanem Dickey-Fuller testu), je karakteristična enačba bolj kompleksna:

$$\alpha_0 + \alpha_1 \lambda^1 + \alpha_2 \lambda^2 + \dots + \alpha_{p-1} \lambda^{p-1} = 0 \quad (24)$$

Analogno je model stacionaren (in proces, ki je generiral časovno vrsto oz. časovna vrsta), kadar so vse ničle polinoma karakteristične enačbe absolutno večje od ena.

¹⁸ Ang. *Lag Operator*.

¹⁹ Ang. *Lag Polynom*.

²⁰ Ang. *Reverse Characteristic Equation*.

²¹ Ang. *Roots of the Polynom*.

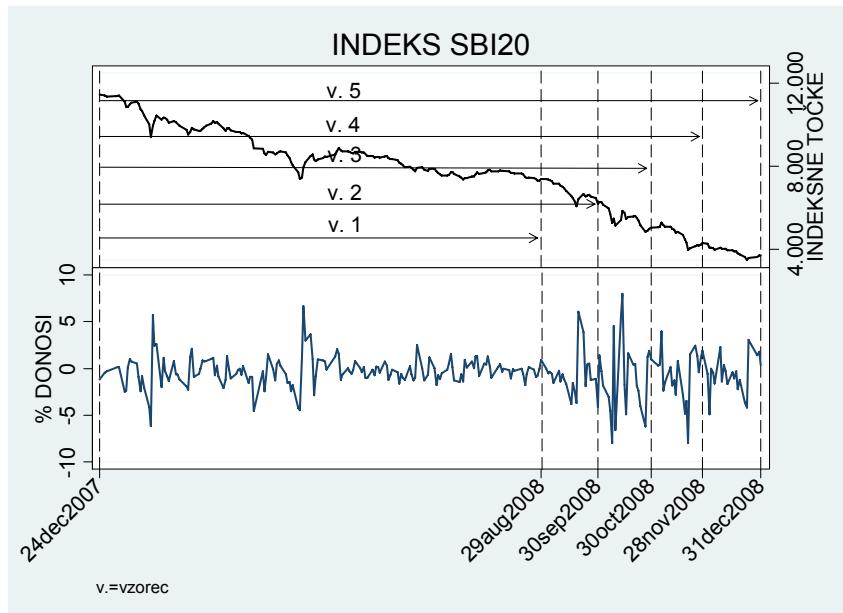
²² Kratkoročna srednja vrednost stacionarne časovne vrste bi bila približno enaka njeni dolgoročni srednji vrednosti.

Kadar pa ima avtoregresijski model p-tega reda rešitev, ki je enaka 1, pravimo, da ima enotsko rešitev. Časovna vrsta, ki jo lahko modeliramo z modelom, katerega obratna karakteristična enačba vsebuje enotsko rešitev, ni stacionarna, vsebuje stohastičen trend.

4.4 Praktičen primer

Iz slike vrednosti borznega indeksa je razviden negativen trend, ki bi ga lahko opisala ena sama trendna linija:

Slika 2: Vrednost in donosnost borznega indeksa SBI20, 24 dec. 2007 - 31 dec. 2008



Vir: Podatkovna baza Ljubljanske borze, 2009.

Trend vsebovan v finančnih podatkih je načeloma stohastičen, kljub temu pa moramo raziskati možnost, da časovna vrsta vsebuje determinističen trend. Vključitev časovnega trenda ne razreši problema nestacionarnosti časovne vrste. Ostanki linearne regresije s časovnim trendom so izrazito avtokorelirani in ne spominjajo na beli šum (glej Prilogo 2). Enako potrdijo standardni testi ostankov.

Možnost, da je trend v časovni vrsti indeksa SBI20 mogoče opisati z deterministično funkcijo časa, izključimo. Trend, vsebovan v indeksu SBI20, je najverjetneje stohastičen. Trend je stohastičen, kadar se giblje skozi čas naključno, takšen trend izničimo z uporabo diferenc.

Časovno vrsto indeks SBI20 transformiramo v časovno vrsto differenc, ki opisuje odstotno rast indeksa SBI20 (pomnožili jo bomo s 100):

$$\Delta y_t \% = \frac{\Delta y_t}{y_t} * 100 \quad (25)$$

Transformirana časovna vrsta oz. odstotna donosnost indeksa SBI20 (Slika 2) izgleda popolnoma drugače. Jasno je, da smo s transformacijo vsaj delno izničili vpliv stohastičnega trenda in zdi se, da je časovna vrsta sedaj stacionarna. Nič več ne postopa okoli trendne linije, temveč jasno oscilira okoli svoje srednje vrednosti. Vendar pa je razpršenost donosov oz. varianca donosov v določenih obdobjih večja in v določenih manjša. To bi lahko tolmačili kot namig, da transformirana časovna vrsta morda ni stacionarna.

Iz koreogramov donosov indeksa SBI20 (glej Slike 1 in 2 v Prilogi 3) je razvidna prisotnost šibke avtokorelacijske in šibke parcialne avtokorelacijske. Časovna vrsta, ki ne vsebuje avtokorelacijske, je v večini primerov stacionarna (glej poglavje Beli šum) in časovna vrsta, ki vsebuje očitno avtokorelacijo, je najverjetnejše nestacionarna. V indeksu SBI20 je pri določenih odlogih prisotna šibka avtokorelacija, vendar ne izzveneva postopoma, kot je to značilno za nestacionarne časovne vrste. Na podlagi Q statistike ne moremo zavrniti domneve o prisotnosti avtokorelacijske (glej Tabelo 1 v Prilogi 3). Rezultati si nasprotujejo. Katerakoli trditev - časovna vrsta je/ni stacionarna - bi lahko bila napačna. Potrebujemo nove dokaze.

Časovno vrsto donosov smo zato analizirali s pomočjo Dickey-Fuller testa in ojačanega Dickey-Fueller testa z odlogi do petega reda. Preverili smo vse možne kombinacije naključnega hoda: enostavni naključni hod, naključni hod s trendom ter naključni hod z determinističnim časovnim trendom. Izmed vseh različic Dickey-Fueller testa sta imeli samo dve statistično značilne koeficiente, t.j. enostavni naključni hod in enostavni naključni hod s trendom (glej Izpis 1 v Prilogi 3). Na podlagi obeh Dickey-Fuller testov smo pri ničelni stopnji značilnosti zavnili ničelno domnevo, ki pravi, da časovna vrsta vsebuje enotsko rešitev korena oziroma da jo je mogoče modelirati s pomočjo modela naključnega hoda. Sklenemo, da je časovna vrsta donosov indeksa SBI20 stacionarna in kot tako primerna za modeliranje.

Spremenljivka y_t se je do sedaj nanašala na časovno vrsto vrednosti indeksa SBI20. Zaradi enostavnosti se od tega poglavja dalje spremenljivka y_t nanaša na časovno vrsto donosov indeksa SBI20.

5. Modeliranje sredine

Eden izmed najpogosteje uporabljenih ter najučinkovitejših pristopov²³ k modeliranju stacionarnih časovnih vrst se imenuje Box-Jenkins²⁴ pristop (v nadaljevanju B-J pristop). Cilj B-J pristopa je izbrati najboljši model časovne vrste iz t. i. ARIMA²⁵ družine modelov. Običajni modeli časovnih vrst temeljijo na vzročno posledičnih zvezah med spremenljivkami. ARIMA modeli pa se osredotočajo na verjetnostne značilnosti časovnih vrst, zato jih nekateri imenujejo tudi »tehnicistični modeli«. ARIMA modeli praviloma ne vsebujejo eksogenih pojasnevalnih spremenljivk²⁶, edino, kar potrebujemo za izgradnjo ARIMA modela, je spremenljivka sama. Prihodnja vrednost spremenljivke je napovedana na podlagi lastnih odloženih vrednosti spremenljivke in z lastnimi slučajnimi napakami. Gujarati (2003, str. 735) pravi, da se pristop poslužuje filozofije: »Naj podatki govorijo sami o sebi.«

²³ Ostali pomembnejši pristopi so: vektorska avtoregresija (ang. *Vector Autoregression*), analiza glavnih komponent (ang. *Principal Component Analysis*), faktorska analiza (ang. *Factor Analysis*), modeli prostorov stanj (ang. *State Space Models*) in modeli porazdeljenih odlogov (ang. *Distributed Lag Models*).

²⁴ Leta 1978 sta G. P. E. Box in G. M. Jenkins izdala publikacijo »Time Series Analysis: Forecasting and Control«. Vse od takrat se je pristop še razvijal in danes velja za enega najzanesljivejših.

²⁵ Integrirani avtoregresijski modeli s premikajočim povprečjem (ang. *Auto Regressive Integrate Moving Average Model*).

²⁶ Izjema so ARMAX modeli, kjer X predstavlja eksogeno spremenljivko (ang. *Exogenous Variable*), ki jo vključimo v model.

5.1 Avtoregresijski modeli

Kot pravita Stock in Watson (2003, str. 438) je pri napovedovanju prihodnosti najbolje začeti kar v bližnji preteklosti. Njuna trditev se opira na inercijo (vztrajnost), ki je prisotna v večini ekonomskeih časovnih vrst. Avtoregresijski model²⁷ prvega reda prejšnjo trditev ponazorijo z matematičnimi simboli (Stock & Watson, 2003, str. 439):

$$\begin{aligned} y_t &= \alpha + \rho_1 y_{t-1} + \varepsilon_t \\ E(y_t) &= \alpha + \rho_1 y_{t-1} \\ \varepsilon_t &\sim i.i.d(0, \sigma^2) \end{aligned} \quad (26)$$

Avtoregresijski model prvega reda pravi, da je pričakovana vrednost odvisne spremenljivke ($E(y_t)$) pojasnjena s svojo lastno preteklo vrednostjo (y_{t-1}). Odklane pričakovane vrednosti ($E(y_t)$) od dejanske vrednosti (y_t) pa je moč pripisati zgolj slučajni napaki (ε_t). S krajšim nazivom avtoregresijski model prvega reda zapišemo kot: AR(1). Številka 1 označuje red modela oz. število odlogov lastnih vrednosti spremenljivke, ki nastopajo kot pojasnjevalne spremenljivke. V zgornjem primeru smo kot pojasnjevalno spremenljivko uporabili prvi odlog spremenljivke y_t , torej y_{t-1} , in odtod tudi ime »avtoregresijski model prvega reda«. Model se imenuje avtoregresijski, ker se spremenljivka pojasnjuje sama, s svojimi lastnimi preteklimi vrednostmi.

Seveda bi kot pojasnjevalno spremenljivko lahko uporabili tudi drugi odlog (y_{t-2}). V tem primeru bi dobili avtoregresijski model drugega reda, AR(2). Analogno avtoregresijski model p-tega reda zapišemo kot (Stock & Watson, 2003, str. 442):

$$\begin{aligned} y_t &= \alpha + \rho_1 y_{t-1} + \rho_2 y_{t-2} + \dots + \rho_p y_{t-p} + \varepsilon_t \\ E(y_t) &= \alpha + \rho_1 y_{t-1} + \rho_2 y_{t-2} + \dots + \rho_p y_{t-p} \end{aligned} \quad (27)$$

Pri čemer napovedujemo sedanjo vrednost spremenljivke y_t s p-timi lastnimi odlogi (y_{t-i} ; $i=1, \dots, p$) in model s skrajšanim nazivom zapišemo kot AR(p). Z uporabo operatorja odlogov model zapišemo kot:

$$\alpha + (1 - \rho_1 L - \rho_2 L^2 - \dots - \rho_p L^p) y_t = \alpha + \rho(L) y_t = \varepsilon_t \quad (28)$$

V praksi je red avtoregresije p neznan. Obstajajo trije pristopi, s pomočjo katerih lahko določimo red avtoregresije. Prvi pristop vključuje primerjavo vzorčnih avtokorelacijskih in delnih avtokorelacijskih funkcij s teoretičnimi funkcijami. Drugi pristop se poslužuje t. i. informacijskih kriterijev²⁸, ki so zasnovani tako, da modele ocenijo z dveh vidikov: kako dobro se podatki prilegajo modelu ter kako kompleksen je model. Tretji pristop pa med konkurenčnimi modeli izbere tistega, ki ima najboljšo izvenvzorčno napovedno moč. Nekoliko več bo o posameznem pristopu povedano v nadaljevanju (glej poglavji Box-Jenkins metodologija in Informacijski kriteriji).

²⁷ Ang. *Autoregressive Model*.

²⁸ Ang. *Information Criteria*.

5.2 Modeli premikajočega povprečja

Poleg avtoregresijskih modelov generiranja podatkov so se pri modeliranju ekonomskih časovnih vrst izkazali tudi modeli premikajočega povprečja²⁹. Ideja je preprosta (Gujarati, 2003, 737):

$$\begin{aligned}y_t &= \alpha + \varepsilon_t + \theta_1 \varepsilon_{t-1} + \theta_2 \varepsilon_{t-2} + \dots + \theta_q \varepsilon_{t-q} \\E(y_t) &= \alpha + \theta_1 \varepsilon_{t-1} + \theta_2 \varepsilon_{t-2} + \dots + \theta_q \varepsilon_{t-q}\end{aligned}\quad (29)$$

Pričakovano vrednost odvisne spremenljivke ($E(y_t)$) določa konstanta (α) ter premikajoče povprečje preteklih vrednosti slučajnih napak ($\theta_1 \varepsilon_{t-1} + \theta_2 \varepsilon_{t-2} + \dots + \theta_q \varepsilon_{t-q}$). Pričakovana vrednost ($E(y_t)$) se od dejanske vrednosti (y_t) razlikuje zgolj zaradi trenutne vrednosti slučajne napake (ε_t). Število odlogov slučajnih napak (ε_{t-i}), ki nastopajo kot pojasnjevalne spremenljivke, ponazarja črka q . Skrajšano model premikajočega povprečja q -tega reda označimo kot: MA(q). Z operatorjem odloga pa ga zapišemo kot:

$$y_t = \alpha + (1 + \theta_1 L + \theta_2 L^2 + \dots + \theta_q L^q) \varepsilon_t = \alpha + \theta(L) \varepsilon_t \quad (30)$$

Pri avtoregresijskih modelih smo dovolili, da sedanj vrednost spremenljivke pojasnimo z njenimi lastnimi preteklimi vrednostmi, kar lahko utemeljimo z inercijo, ki je prisotna v večini časovnih vrst. Na primeru donosov borznega indeksa to pomeni, da je moč s pomočjo preteklih donosov pojasniti prihodnje donose borznega indeksa. Model skuša »posneti« vzorec, ki se pojavi pri zaporednih gibanjih donosov. Pri modelih premikajočega povprečja je intuicija nekoliko drugačna. V primeru donosov borznih indeksov si lahko slučajne napake v trenutku t predstavljamo kot prihod novih nepoznanih informacij na trg. Informacije, ki so bile v trenutku $t-1$ še nepoznane in so prispele v trenutku t , nato tekom dneva trg ovrednoti in jih jutri, v trenutku $t+1$, vgradi v cene vrednostnih papirjev, torej določi dnevni donos indeksa v obdobju $t+1$. Avtoregresijski modeli donose modelirajo s pomočjo preteklih informacij, ki so vgrajene pretekle donose (y_{t-1}), medtem ko modeli premikajočega povprečja za pojasnjevanje donosov uporabljajo pretekle informacijske šoke (prihode novih informacij ε_{t-1}), ki so povzročili odklon preteklih donosov od pričakovanih.

Določitev reda q je v praksi, tako kot pri avtoregresijskih modelih, prepuščena analizi avtokorelacijske in delne avtokorelacijske funkcije, informacijskim kriterijem ter ovrednotenju napovednih moči modelov.

Omeniti velja tudi, da so teoretično modeli premikajočega povprečja zgolj drugačen zapis avtoregresijskih modelov in obratno. Za vsak avtoregresijski obstaja ekvivalenten model premikajočega povprečja.

5.3 ARIMA modeli

Koncepti avtoregresijskega modela, integriranosti časovnih vrst in modelov premikajočega povprečja so kompaktno združeni v ARIMA³⁰ modelih. ARIMA modeli niso nič drugega kot

²⁹ Ang. *Moving Average Models*.

³⁰ Ang. *Auto Regressive Integrated Moving Avergae Models*.

različne kombinacije do sedaj opisanih modelov. Splošna oblika ARIMA(p,d,q) modela je sledeča (Tsay, 2002, str. 50):

$$\begin{aligned} y_t &= \alpha + \rho_1 y_{t-1} + \rho_2 y_{t-2} + \dots + \rho_p y_{t-p} + e_t + \theta_1 e_{t-1} + \dots + \theta_q e_{t-q} \\ E(y_t) &= \alpha + \rho_1 y_{t-1} + \rho_2 y_{t-2} + \dots + \rho_p y_{t-p} + \theta_1 e_{t-1} + \dots + \theta_q e_{t-q} \end{aligned} \quad (31)$$

Kjer p označuje število lastnih odlogov spremenljivke y_t , d stopnjo integriranosti časovne vrste (glej poglavje Diference in odlogi) in q število odlogov slučajnih napak, ki nastopajo kot pojasnevalne spremenljivke. Zapisano z operatorji odlogov:

$$\alpha + \rho(L)y_t = \theta(L)e_t \quad (32)$$

Določeno časovno vrsto je moč predstaviti z različnimi modeli. Na raziskovalcu stoji, da izmed konkurenčnih modelov izbere tistega, ki to delo opravi najbolje. Pri tem je pomembno, da je model kratek in preprost, da dobro opiše podatke in ima dobro napovedno moč. S skupnimi besedami - model naj bo robusten.

6. Box-Jenkins metodologija

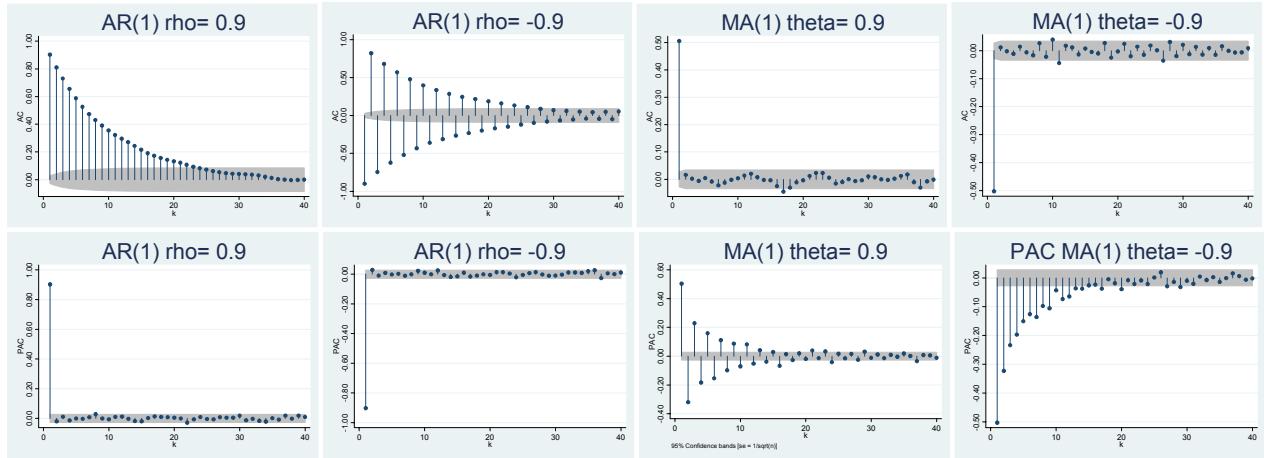
Pri izbiri parametrov p, d in q v praksi uporabljamo t. i. Box-Jenkins metodologije, ki sta jo leta 1978 v knjigi »Time Series Analysis: Forecasting and Control« prvič predstavila Box in Jenkins. Cilj B-J metodologije je izbira modela, ki kar najbolje opiše proces generiranja podatkov. Na podlagi modela in ob predpostavki stacionarnosti časovne vrste (ter upanju, da bo takšna ostala tudi v prihodnje) lahko nato sklepamo o prihodnjih vrednostih časovne vrste. Metodologija je sestavljena iz štirih korakov (nekateri so bili zaradi jasnosti predstavljeni že v predhodnih poglavjih), s pomočjo katerih identificiramo primeren model (Gujarati, str. 738):

1) Določimo vrednosti parametrov p, d in q.

Določitev parametra d, ki predstavlja stopnjo integriranosti časovne vrste ($I(d)$), je podrobnejše predstavljena v poglavju Oblikovanje stacionarne časovne vrste. Časovno vrsto integriramo vse, dokler le-ta ne postane stacionarna.

Pri določitvi reda p in q ARIMA modela si pomagamo s teoretičnimi porazdelitvami avtokorelacijskih in delnih avtokorelacijskih funkcij. Izgled avtokorelacijske funkcije in delne avtokorelacijske funkcije je močno odvisen od vrste procesa generiranja podatkov. Proses generiranja podatkov modeliramo s pomočjo ARIMA modelov in vsak ARIMA model določene oblike (oz. časovna vrsta, ki jo z njimi modeliramo) ima pripadajočo obliko avtokorelacijske in delne avtokorelacijske funkcije. Npr. korelacijske funkcije AR(1) ($\rho=+/-0.9$) in MA(1) ($\theta=+/-0.9$) procesa izgledajo takole (simulirano v programske paketu Stata, glej Prilogu 4) :

Slika 3: Grafikoni avtokorelacijskih (zgoraj) in delnih avtokorelacijskih (spodaj) simuliranih modelov



Vir: Podatkovna baza Ljubljanske borze, 2009.

V kolikor se vzorčni avtokorelacijski in delni avtokorelacijski funkciji ujemata z njunima teoretičnima sestrami, je to dober pokazatelj, s katerim modelom lahko opišemo proces generiranja podatkov. Gujarati (2003, str. 726) omenja nekaj splošnih napotkov pri analizi korelacijskih funkcij:

Tabela 2: Teoretični vzorci avtokorelacijske in delne avtokorelacijske funkcije

Model	Avtokorelacijska funkcija	Delna Avtokorelacijska funkcija
AR(p)	Avtokorelacija izveni postopoma ali s pojemajočim sinusnim vzorcem.	Delna avtokorelacija popolnoma izgine, je »odsekana« po odlogu p.
MA(q)	Avtokorelacija popolnoma izgine, je »odsekana« po odlogu q.	Delna avtokorelacija izveni postopoma ali s pojemajočim sinusnim vzorcem.
ARMA(p,q)	Izzveni postopoma.	Izzveni postopoma.

Vir: D. Gujarati, Basic Econometrics, 2003, str. 742.

Žal je v praksi iz vzorčne avtokorelacijske in delne avtokorelacijske funkcije nemalokrat težko razbrati vzorec. Proses generiranja podatkov je očem skrit in možno bi bilo na primer, da je to alternirajoč proces med procesom AR(p) in MA(q). Vzorčni korelacijski funkciji takšnega procesa bi imeli povsem samosvojo obliko, neprimerljivo s katerokoli izmed zgornjih. V tem primeru se v praksi zatečemo k informacijskim kriterijem³¹.

2) Model ocenimo

Po določitvi parametrov p, d in q model ocenimo. Obstaja več cenilk, s katerimi lahko model ocenimo³². Sodobni statistični paketi povečini uporabljajo metodo največjega verjetja (predstavljena v poglavju Metoda največjega verjetja)³³. Poleg metode največjega verjetja

³¹ Obstajajo tudi novejši pristopi, ki se naslanjajo na teorijo verjetnostne gostote.

³² Poleg obravnavanih še: Yule-Walker metoda, ki je nepristranska, vendar neučinkovita metoda, ter metoda najmanjših kvadratov (ang. *Least Squares Estimator*). Kadar imamo opravka s členi premikajočega povprečja, so prvi odvodi MA koeficientov pri metodi MNKV nelinearni. Zato je takšne modele potrebno oceniti z iterativnimi postopki tako, kot pri metodi največjega verjetja. Prednost metode največjega verjetja je njena fleksibilnost, zato je le-ta večkrat uporabljena v statističnih paketih. Poleg tega obe metodi asimptotično enaki.

³³ Ang. *Maximum Likelihood Method*.

bomo v diplomskem delu uporabili tudi Bayesovsko cenilko (glej poglavje Bayes cenilka). Metoda največjega verjetja je najpogosteje uporabljen, saj je izjemno fleksibilna.

3) Preverimo robustnost modela

Kot vsak model je potrebno tudi dotični ARIMA model temeljito preveriti. Opravimo osnovne teste o statistični značilnosti koeficientov in modela kot celote ter preverimo določene dodatne predpostavke: predpostavke o stacionarnosti in invertibilnosti, ali se slučajna napaka porazdeljuje kot beli šum³⁴ ipd. (več o tem v naslednjem poglavju pri praktičnem delu). Velikokrat se zgodi, da katera izmed predpostavk ni zadovoljena izpolnjena. Takrat je potrebno ponovno razmisljiti o vseh fazah izgradnje ARIMA modela in, v kolikor napake ne odpravimo, o alternativnem ARIMA modelu. Alternativni model velikokrat pomeni zgolj manjšo spremembo obstoječega modela. Box-Jenkins modeliranje je iterativen proces.

4) Napovedi

Box-Jenkins pristop in ARIMA modeli so postali popularni zaradi njihove napovedne moči. Kratkoročne napovedi ARIMA modelov veljajo za natančnejše kot pa napovedi modelov, ki temeljijo na vzročno posledičnih povezavah med spremenljivkami.

Model sredine, kar ARIMA model je, potrebujemo za modeliranje nestanovitnosti. Odklon pričakovane vrednosti spremenljivke od njene dejanske vrednosti (ε_t) je temeljni podatek, ki vstopa v enačbo pogojne variance.

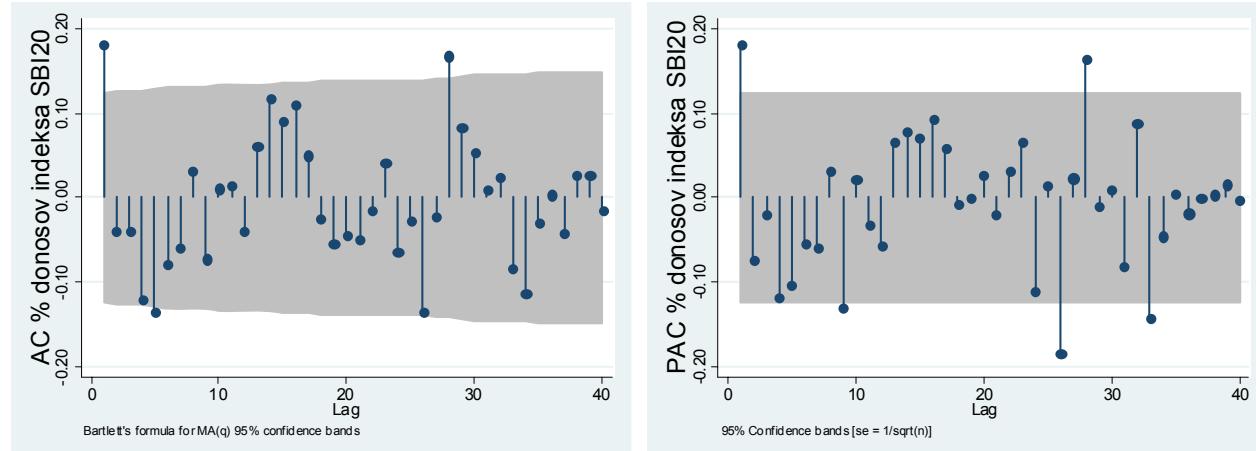
6.1 Praktičen primer

Prvi korak BJ metodologije je določitev reda integriranosti časovne vrste d (glej poglavje Oblikovanje stacionarne časovne vrste). Oblikovanje modelov na podlagi nestacionarne časovne vrste je brezplodno početje. Obravnava v predhodnih poglavijih je pokazala, da je vrednost indeksa SBI20 nestacionarna časovna vrsta, ki postane stacionarna po integraciji prvega reda. Indeks SBI20 je $I(1)$. Vsi nadaljnji postopki se zato nanašajo na stacionarno časovno vrsto odstotnih donosov indeksa SBI20.

Žal vzorčne avtokorelacijske in delne avtokorelacijske funkcije odstopajo od teoretičnih funkcij, zato smo nekoliko skeptični pri izbiri primerenega ARIMA modela na podlagi korelacijskih funkcij. Spodnji sliki prikazujeta korelacijski funkciji glavnega vzorca (za slike podvzorcev glej Prilogo 5):

³⁴ Ang. *White Noise*.

Slika 4: Avtokorelacijska in delna avtokorelacijska funkcija % donosov SBI20, 24. dec 2007 do 31. dec. 2009



Vir: Podatkovna baza Ljubljanske borze, 2009.

V vseh podvzorcih ter glavnem vzorcu je autoregresijski koeficient prvega odloga statistično značilno različen od nič. Nato se pojavljajo posamični odlogi, ki so statistično značilno različni od nič, vendar ne v vseh vzorcih. Podobno se obnašajo tudi delni autoregresijski koeficienti. Vsekakor je v vseh vzorchih prvi delni koeficient statistično značilen, sledijo pa mu posamični osamelci pri višjih odlogih. Avtokorelacije in delne avtokorelacije pri vseh vzorcih nikoli ne izzvenijo popolnoma³⁵.

Sumimo, da je proces generiranja podatkov moč modelirati z več procesi, med katerimi morda ni močno dominantnega. Oblike avtokorelacijskih in delnih avtokorelacijskih funkcij nam namigujejo autoregresijski model ali pa model premikajočega povprečja prvega reda, AR(1) ali MA(1). Možen je tudi model, ki vključuje oba člena, ARMA(1,1).

Ker na podlagi avtokorelacijskih in delnih avtokorelacijskih koeficientov ne moremo izbrati najprimernejšega ARIMA modela, poleg tega pa nekateri avtorji (npr. Tsay, 2002, str. 51) celo menijo, da na podlagi AC in PAC funkcij ne moremo sklepati o redih ARIMA modela, se bomo pri izbiri modelov zatekli k uporabi informacijskih kriterijev.

6.2 Informacijski kriteriji

6.2.1 Akaike in Bayesovski informacijski kriterij

Informacijski kriteriji so statistični parametri, ki ovrednotijo koristi in stroške od vključitve dodatnega odloga v regresijski model. Kadarkoli modelu dodamo pojasnjevalno spremenljivko, se izboljša njegovo prileganje podatkom³⁶ oz. »fit« modela³⁷. Dodatni odlogi v ARIMA modelu so sposobni zajeti morebitne informacije, ki so jih odlogi nižjega reda »spregledalci«. Vendar pa dodajanje odlogov hkrati povzroča tudi stroške. Stroški nastajajo zaradi kompleksnosti modela. V praksi želimo enostaven in robusten model. Modeli, zasičeni s pojasnjevalnimi spremenljivkami, imajo praviloma tudi slabo napovedno moč.

³⁵ To je lahko tudi namig, da časovna vrsta ni popolnoma stacionarna, vendar pa smo to možnost izločili z Dickey-Fueller testi.

³⁶ Izboljšanje je ponavadi vsaj inkrementalno. Vsekakor vključitev nove pojasnjevalne spremenljivke že po definiciji ne more poslabšati prileganja modela podatkom.

³⁷ V žargonu se uporablja angleško besedo *Fit*, njen najpogostejsi statistični nadomestek pa je determinacijski koeficient oz. R^2 .

Informacijskih kriterijev je veliko. V praksi se najpogosteje uporablja Bayesov informacijski kriterij³⁸ (BIC) in Akaike informacijski kriterij³⁹ (AIC) (Mills, 1999, str. 34-35):

$$AIC(p, q) = \log \hat{\sigma}^2 + 2(p + q)T^{-1} \quad (33)$$

$$BIC(p, q) = \log \hat{\sigma}^2 + (p + q)T^{-1} \log T \quad (34)$$

Modeli z nižjo vrednostjo informacijskega kriterija imajo prednost pred modeli z višjo vrednostjo informacijskega kriterija. Prvi člen v informacijskih kriterijih⁴⁰ je ocenjena varianca ostankov in meri prileganje modela podatkom. Več pojasnevalnih spremenljivk kot vključimo v model, več regresijskih koeficientov imamo na voljo, da model prilagodimo podatkom. Dodatna pojasnevalna spremenljivka nikakor ne more poslabšati prileganja modela podatkom. V skrajnem primeru, ko dodana spremenljivka resnično nič več ne prispeva k pojasnjevanju podatkov, njen pripadajoči regresijski koeficient enostavno zavzame vrednost nič in varianca ostankov ostane nespremenjena. Večinoma pa se z dodajanjem pojasnevalnih spremenljivk varianca ostankov vztrajno zmanjšuje in zmotno mislimo, da imamo opravka z vedno boljšim modelom procesa, ki generira podatke⁴¹. Zato je drugi člen informacijskih kriterijev izgrajen tako, da kaznuje vključitev dodatne pojasnevalne spremenljivke v model. Večje je število odlogov p in q, večji je drugi člen. Informacijski kriteriji tehtajo koristi in stroške vključitve dodatne pojasnevalne spremenljivke.

Monte Carlo simulacije so pokazale, da ima AIC slabost. Ne glede na velikost vzorca neupravičeno favorizira modele z več parametri (Fabozzi et. al., 2007, str. 252). BIC močneje penalizira število parametrov in velja za asimptotično konsistentno cenilko pravega števila parametrov. Vendar pa v praksi vzorci niso neskončno veliki in so podatki redko generirani z določenim ARIMA modelom (oz. ga slabo posnemajo), zato lastnost nepristanskosti niti ni tako zelo pomembna.

Kljud imenu BIC kriterij uporabljamo za izbiro modela v klasični-frekventnostni ekonometriji in ne Bayesovski ekonometriji (glej poglavje Cenilke modelov). BIC kriterij sicer »pripada« klasični ekonometriji, ime pa je dobil po Bayesovem teoremu (glej poglavje Bayesov teorem). Schwarz ga je l. 1978 utemeljil s pomočjo poenostavljenih Bayesovskih primerjave modelov. Schwarz je zanemaril priorne verjetnosti modelov, uporabil cenilko največjega verjetja in osnoval kriterij, ki izbere model z največjo posteriorno verjetnostjo (glej poglavje Ocenjevanje z Bayes cenilko in Bogdan, Ghosh, Doerge (2004, str. 992)).

Velja opomniti, da so informacijski kriteriji zgolj dodatna pomoč pri izbiri modela. Modeli so ocenjeni na vzorčnih podatkih, torej dejansko razpolagamo samo z ocenami pravih vrednosti informacijskih kriterijev. Pri izbiri modelov se zato opremo tako na korelacijske funkcije, informacijske kriterije ter standardne teste statistične značilnosti koeficientov in modelov. Poleg standardnih testov se pri analizi časovnih vrst še posebej osredotočimo na analizo ostankov.

³⁸ Ang. *Bayes Information Criteria* oz. *Schwarz Information Criteria*. Včasih imenovan tudi kot Schwarzov informacijski kriterij. Giedon E. Schwarz je utemeljil njegovo uporabnost s pomočjo Bayesovske statistike.

³⁹ Ang. *Akaike Information Criteria*.

⁴⁰ V prvotni obliki sta AIC in DIC definirana v drugačni obliki s pomočjo funkcije verjetja. Kadar pa se ostanki porazdeljujejo normalno privzameta gornjo obliko.

⁴¹ Lahko si predstavljamo, da v model vključimo maksimalno število odlogov. Varianca ostankov bo zelo blizu nič, vendar pa to ni model procesa generiranja podatkov, temveč zgolj kompleksna transformacija podatkov.

6.2.2 Informacijski kriterij odklonskosti

AIC in BIC uporabljamo za primerjavo modelov v klasični ekonometriji. V Bayesovski ekonometriji se teoretično ne uporablja informacijskih kriterijev. Razlog je preprost. V Bayesovski ekonometriji ni nepravilnega modela, so zgolj bolj ali manj verjetni modeli. V klasični ekonometriji raziskovalec operira z enim modelom, tistim, ki maksimizira verjetnost podatkov. Bayesovski ekonometrik oceni izčrpen set modelov, izračuna verjetnost posameznega modela in operira z vsemi modeli hkrati. Napovedi in hipoteze temeljijo na vseh modelih hkrati in so tehtane z verjetnostjo posameznega modela.

Izračunavanje verjetnosti modelov ni preprosta naloga. Napovedovanje in preverjanje hipotez na podlagi seta modelov zna biti zapleteno in zamudno opravilo. Zato so se tudi v Bayesovski ekonometriji pojavile različice informacijskih kriterijev, ki naj raziskovalcu služijo kot vodilo pri izbiri modela. Statistični program Winbugs poroča informacijski kriterij odklonskosti⁴² (v nadaljevanju DIC). Tako kot ostali informacijski kriteriji tudi DIC tehta med prileganjem podatkom ter kompleksnostjo modela. DIC temelji na parametru, ki se imenuje »odklonskost⁴³« in je definiran s pomočjo logaritma funkcije verjetja (funkcijo verjetja obravnavamo v poglavju Metoda največjega verjetja, str. 49):

$$D(\theta) = -2 p(y|\theta) = -2 LL(y|\theta) \quad (35)$$

Kjer θ predstavlja vektor parametrov, ki jih ocenujemo. V Bayesovski ekonometriji generiramo vektorje parametrov θ , na podlagi katerih nato ocenimo posteriorne vrednosti parametrov. Vsakemu vektorju parametrov θ pa pripada tudi lastna funkcija logartima verjetja. V Bayesovski ekonometriji implicitno generiramo tudi vzorec funkcij verjetja. Na podlagi vzorca funkcij verjetja lahko sklepamo o primernosti modela. Nižja kot je odklonskost, $D(\theta)$, boljše je prileganje modela podatkom.

Kompleksnost modela, p_D , merimo s pomočjo t. i. »efektivnega števila parametrov⁴⁴«:

$$p_D = E[D(\theta)] - D(E[\theta]) = \bar{D} - D(\bar{\theta}) \quad (36)$$

Efektivno število parametrov je definirano kot razlika med povprečno odklonskostjo, \bar{D} , in vrednostjo odklonskosti, ovrednoteno pri povprečni vrednosti parametrov, $D(\bar{\theta})$. Ker je odklonskost definirana s funkcijo verjetja, lahko zgornji obrazec interpretiramo kot razliko med povprečno funkcijo verjetja in funkcijo verjetja, ovrednoteno pri povprečju, kar pa je ključna vrednost pri ocenjevanju stopinj prostosti (Best, Carlin, Linde in Spiegelhalter, 2002, str. 587).

DIC je nato izračunan kot:

$$DIC = D(\bar{\theta}) - 2 p_D = \bar{D} - p_D \quad (37)$$

kjer prvi člen vsakokrat predstavlja prileganje podatkom in drugi člen kompleksnost modela. Kompleksnost modela je merjena preko efektivnega števila parametrov, ki nam služi kot

⁴² Ang. *Deviance Information Criteria*.

⁴³ Ang. *Deviance*.

⁴⁴ Ang. *Effective Number of Parameters*.

strežnik za število stopinj prostosti. Manjše kot je število stopinj prostosti, več parametrov je bilo potrebno oceniti v modelu in kompleksnejši je model. Ker je odklonskost negativna funkcija funkcije verjetnosti in imajo efektivne stopinje prostosti negativen predznak, kot najprimernejši izberemo model z najnižjo vrednostjo informacijskega kriterija DIC.

6.3 Beli šum

Na tem mestu je smiseln pojasniti pojem »beli šum⁴⁵«, ki igra pomembno vlogo pri analizi ostankov modela. Beli šum je zaporedje neodvisnih, enako porazdeljenih naključnih spremenljivk. Vsak podatek v časovni vrsti predstavlja eno spremenljivko. Časovno vrsto je generiralo T spremenljivk, kjer T predstavlja število opazovanj. Vseh T spremenljivk se porazdeljuje v enakih porazdelitvah, vendar pa so med seboj neodvisne. Ker druga na drugo ne vplivajo, s pomočjo ene spremenljivke ne moremo pojasniti druge, njihova kovarianca je enaka nič. Obenem se porazdeljujejo v enakih porazdelitvah, kar praktično pomeni (če zanemarimo druge momente), da imajo vse enako pričakovano sredino, t.j. nič in enako konstantno varianco.

Proces generiranja podatkov, katerega realizacijo predstavlja časovna vrsta identično porazdeljenih, vendar nekoreliranih spremenljivk⁴⁶ (opazovanj) imenujemo »beli šum« in ga matematično zapišemo kot (Fabozzi et. al., 2007, str. 207):

$$E(\varepsilon_t) = 0 \quad (38)$$

$$E(\varepsilon_i \varepsilon_j) = \begin{cases} \sigma^2; i = j \\ 0; i \neq j \end{cases} \quad (39)$$

Oz. krajše:

$$\varepsilon_t \sim WN(0, \sigma^2) \quad (40)$$

Definicija belega šuma zahteva, da so podatki nekorelirani. Nekoliko bolj omejujoč je koncept neodvisnega in identično porazdeljenega zaporedja spremenljivk⁴⁷, ki ga včasih imenujemo tudi strogi beli šum⁴⁸. Za razliko od belega šuma ta od podatkov zahteva, da niso samo nekorelirani, temveč tudi dejansko neodvisni med seboj. Takšen proces s simboli opišemo kot:

$$\varepsilon_t \sim i.i.d.(0, \sigma^2) \quad (41)$$

Ker je takšna definicija, sicer teoretično pravilna, preveč omejujoča in ker je v praksi skoraj nemogoče zagotovo trditi, da so spremenljivke neodvisne, v ekonometriji pogosto operiramo kar z belim šumom. Beli šum je praktična poenostavitev strogega belega šuma. Vsako neodvisno in identično porazdeljeno zaporedje je obenem tudi beli šum (obratno ne velja vedno). Poznamo več vrst belega šuma. Le-ti se razlikujejo glede na to, v kakšni porazdelitvi

⁴⁵ Ang. *White noise (WN)*.

⁴⁶ V praksi zahtevamo da sta avtokorelacija in delna avtokorelacija dovolj blizu nič.

⁴⁷ Ang. *Identical and Independently Distributed (i.i.d.)*.

⁴⁸ Ang. *Strict White Noise*.

se porazdeljujejo. Kadar se beli šum porazdeljuje v normalni porazdelitvi, predpostavka o ničelni korelaciji med spremenljivkami zagotavlja, da so te porazdeljene neodvisno. Normalno porazdeljeni beli šum je v tem primeru neodvisno in identično porazdeljeno zaporedje:

$$\varepsilon_t \sim N(0, \sigma^2) \quad (42)$$

Pri modeliranju časovnih vrst si želimo model, katerega slučajne napake spominjajo na beli šum. To bi pomenilo, da izbrani model upošteva vse relevantne informacije. Ostanki pa bi bili zgolj neodvisno in identično porazdeljeno zaporedje, iz katerega ni moč pridobiti novih informacij.

Beli šum je definiran kot vrsta s konstantno sredino in ničelno avtokorelacijsko funkcijo med odlogi. Vendar pa so to zgolj linearne lastnosti belega šuma. Nelinearne lastnosti (npr.: kvadrati ostankov) lahko izkazujejo avtokorelacijo, kar je ključnega pomena za modeliranje nestanovitnosti oz. višjih redov porazdelitve časovnih vrst. Pri izbiri primerenega ARIMA modela vedno preverimo, ali ostanki spominjajo na beli šum.

6.4 Praktičen primer

Ker na podlagi korelacijskih funkcij nismo mogli enolično določiti primerenega ARIMA modela, se zatečemo k uporabi informacijskih kriterijev. V diplomske nalogi analiziramo nestanovitnost na podlagi 5-ih zaporednih podvzorcev, izmed katerih je vsak za 1 mesec opazovanj večji od predhodnega vzorca (glej Sliko 2 na str. 6). Izračunali smo vrednosti informacijskih kriterijev vseh kombinacij ARMA modelov⁴⁹ do odlogov 5-ega reda, za vsak posamezni podvzorec:

Tabela 3: Vrednosti BIC in AIC donosov indeksa SBI20

Vzorec	Model	BIC	AIC
1	MA(1) brez konstante	612,6	606,3
	AR(1) brez konstante	614,0	607,7
	MA(1)	614,8	605,4
2	MA(1) brez konstante	719,0	712,5
	MA(1)	719,7	710,0
	AR(1) brez konstante	722,2	715,7
3	MA(1) brez konstante	904,5	897,8
	MA(1)	904,7	894,7
	AR(1) brez konstante	905,5	898,8
4	MA(1)	1004,7	994,5
	MA(1) brez konstante	1005,3	998,4
	AR(1)	1005,7	995,3
5	MA(1)	1093,2	1082,6
	AR(1)	1094,2	1083,6
	MA(1) brez konstante	1095,3	1088,2

Vir: Podatkovna baza Ljubljanske borze, 2009.

Podobno kot korelacijske funkcije nam tudi informacijski kriterij BIC sugerirajo izbiro modelov prvega reda, t.j. avtoregresijski model ali model premikajočega povprečja. Najbolje se izkaže model premikajočega povprečja prvega reda MA(1). V prvih treh vzorcih je to

⁴⁹ Prikazane so samo kombinacije brez manjkajočih notranjih AR ali MA členov.

model brez konstantnega člena. V četrtem in petem vzorcu pa postane konstanta izrazito statistično značilna in v dovolj veliki meri prispeva k pojasnjevanju podatkov, da se to odraža tudi v informacijskem kriteriju. AIC je povečini sugeriral izbiro velikih modelov. Ker nas skrbi njegova pristranskost in ne želimo modelov prezasičiti s pojasnjevalnimi spremenljivkami, smo ga pri izbiri zanemarili.

Na podlagi informacijskega kriterija BIC za nadaljnjo analizo izberemo modele premikajočega povprečja prvega reda, MA(1). V prvem podvzorcu je to model brez konstantnega člena, v drugih vzorcih pa s konstantnim členom. V drugem in tretjem vzorcu smo informacijskemu kriteriju navkljub izbrali model s konstanto. V kolikor v drugem in tretjem vzorcu izključimo konstanto, prekršimo osnovno predpostavko regresijske analize, pričakovana vrednost ostankov postane statistično značilno različna od nič.

V kolikor so izbrani modeli premikajočega povprečja zajeli vse sistematične značilnosti časovne vrste donosov, se ostanki modelov porazdeljujejo kot beli šum. Če smo popolnoma natančni, bi se morali ostanki porazdeljevati kot strogi beli šum, vendar se v praksi zadovoljimo z navadnim belim šumom. Na podlagi t statistike pri nobenem modelu ne moremo zavrniti ničelne hipoteze, ki pravi, da ostanki niso enaki nič (glej Tabelo 1 v Prilogi 6). Trditve postavljamo pri vsaj 5 % stopnji značilnosti.

Vrednosti avtokorelačijskih, delnih avtokorelačijskih koeficientov ter Q statistike pa dokazujejo, da ne obstaja korelacija med zaporednimi vrednostmi ostankov (glej Tabele 2-6 v Prilogi 7).

Ostane nam še vprašanje, ali je varianca ostankov konstantna. Zaenkrat odložimo preverjanje hipoteze o konstantni varianci in si oglejmo nekatere druge značilnosti porazdelitev ostankov. Druge značilnosti porazdelitev ostankov implicitno vsebujejo odgovor na zadnje vprašanje.

6.5 Porazdelitev ostankov

Pri ocenjevanju modelov ponavadi predpostavimo, da se ostanki porazdeljujejo v normalni porazdelitvi. Predpostavka je eksplicitno vgrajena v funkcijo verjetja (glej poglavje Primer funkcije verjetja). Vendar pa se finančne časovne vrste in njim pripadajoči ostanki modelov le poredkoma porazdeljujejo normalno. Normalna porazdelitev je simetrična porazdelitev s točno določenimi značilnostmi. V naslednjem poglavju izmed teh značilnosti predstavljamo dva koeficiente, s katerima lahko poleg sredine in variance opišemo normalno porazdelitev.

6.5.1 Asimetrija in sploščenost ostankov

Višje momente porazdelitev običajno opišemo s koeficientoma ukrivljenosti⁵⁰ (standardiziran tretji moment, ki meri smer in stopnjo asimetrije porazdelitve), enačba (44) in sploščenosti⁵¹ (standardiziran četrti moment, ki meri koničavost oz. sploščenost porazdelitve), enačba (45). Koeficient ukrivljenosti normalne porazdelitve je enak nič, saj je porazdelitev popolnoma simetrična. Porazdelitev asimetrična v desno ima pozitiven koeficient ukrivljenosti in obratno. Koeficient sploščenosti normalne porazdelitve pa znaša 3. Porazdelitev, ki jo lahko opišemo s koeficientom sploščenosti višjim od 3, ima višji vrh in debelejše repe od normalne porazdelitve.

⁵⁰ Ang. Skewness.

⁵¹ Ang. Kurtosis.

Finančne časovne vrste imajo praviloma višji koeficient sploščenosti kot normalna porazdelitev. Praktično to pomeni, da je njihova porazdelitev »ozka« z visokim vrhom ter izkazuje debelejše repe (glej poglavje Stilizirana dejstva). Takšno porazdelitev imenujemo leptokurtična porazdelitev⁵².

Z Jarque-Berra testom hkrati preverimo, ali sta odklona v ukrivljenosti in sploščenosti statistično značilno različna od ukrivljenosti in sploščenosti normalne porazdelitve (Fabozzi, 2003, str. 267):

$$H_0 : \frac{\mu^3}{\sigma^3} = 0 \quad \text{in} \quad \frac{\mu^4}{\sigma^4} - 3 = 0 \quad (43)$$

$$\lambda_1 = \frac{1}{6T} \sum_{t=1}^T \left(\frac{\hat{\varepsilon}_t^3}{\hat{\sigma}^3} \right)^2 \quad (44) \quad \lambda_2 = \frac{1}{24T} \sum_{t=1}^T \left(\frac{\hat{\varepsilon}_t^4}{\hat{\sigma}^4} - 3 \right)^2 \quad (45)$$

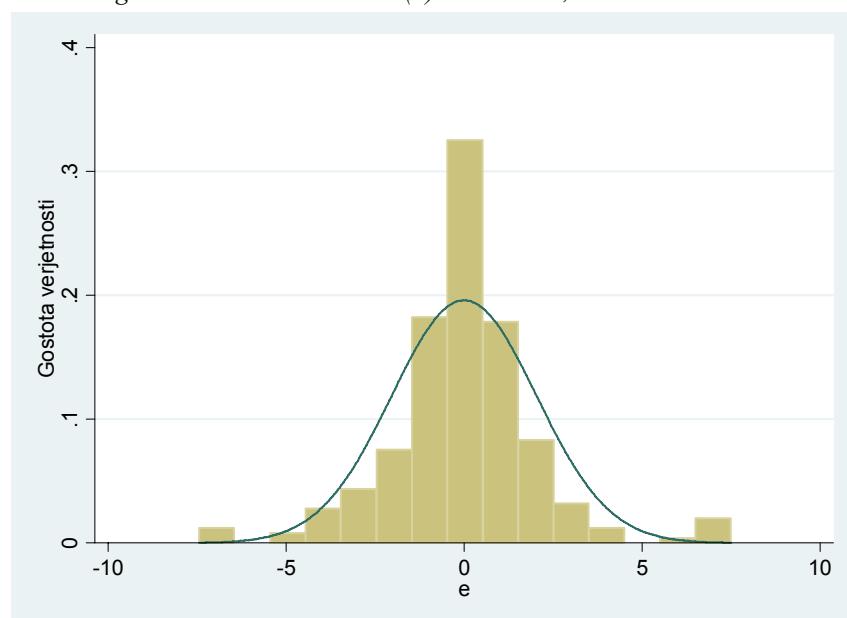
$$\lambda_3 = \lambda_1 + \lambda_2 \quad (46)$$

Vzorčni statistiki λ_1 in λ_2 se porazdeljujeta v χ^2 (1) porazdelitvi. S pomočjo njune vsote λ_3 , ki se porazdeljuje v χ^2 (2), simultano preverimo hipotezo, ali se ostanki porazdeljujejo normalno.

6.5.2 Praktičen primer

Ker smo pri ocenjevanju predpostavili, da se ostanki modelov porazdeljujejo normalno, nas zanima, ali so dobljeni (izračunani) ostanki dejansko normalni. Spodaj je prikazan histogram osatankov ARIMA modela ter prilegajoča se normalna porazdelitev za glavni vzorec.

Slika 5: Histogram ostankov modela MA(1) s konstanto, 24. dec. 2007 - 31. dec. 2008



Vir: Podatkovna baza Ljubljanske borze, 2009.

⁵² Ang. *Leptocurtic Distribution*.

Iz histograma ostankov je razvidno, da imajo izračunani ostanki »višji vrh« in debelejše repe kot pa normalno porazdeljena vrisana gostota verjetnosti. Ugotovitev je značilna tudi za vse podvzorce (glej Slike 1-4 v Prilogi 7).

Tudi tabela z izračunanimi koeficienti ukrivljenosti in sploščenosti ostankov vzorcev nam razkrije, da se le-ti ne porazdeljujejo normalno (glej Tabelo 1 v Prilogi 8). Koeficienti sploščenosti vseh vzorcev presegajo teoretično vrednost 3. Porazdelitev je »ozka« z visokim vrhom ter debelimi repi⁵³. Porazdelitev ostankov je leptokurtična⁵⁴. Poleg leptokurtičnosti se ostanki ne porazdeljujejo popolnoma simetrično.

Na podlagi J-B testa zavrnemo ničelne hipoteze in sklenemo, da se porazdelitev ostankov vseh vzorcev statistično značilno razlikuje od ukrivljenosti in sploščenosti, kakršno imajo normalno porazdeljene spremenljivke.

Takšne porazdelitve, v kakršni se porazdeljujejo naši ostanki, ne moremo posnemati z normalno porazdelitvijo. Kot bomo videli v nadaljevanju, lahko takšno porazdelitev do neke mere modeliramo s pomočjo modelov družine ARCH. Popolnejši učinek pa dosežemo, kadar poleg družine ARCH pri modeliranju vključimo še predpostavko, da se ostanki porazdeljujejo v takšni porazdelitvi, ki ima višji vrh in debelejše repe od normalne. Najpogosteje uporabimo Student-t porazdelitev ali pa mešano normalno porazdelitev⁵⁵. V sklopu te diplomske naloge bomo preizkusili, kako se pri modeliranju obnese Student-t porazdelitev. Z vprašanjem posledic ocenjevanja ARIMA modelov pod predpostavko normalno porazdeljenih ostankov govori naslednje poglavje.

7. Psevdo oz. kvazi metoda največjega verjetja

ARIMA modele smo ocenili pod predpostavko, da se ostanki modelov porazdeljujejo normalno. Vendar pa se finančne časovne vrste in njim pripadajoči ostanki povečini ne porazdeljujejo normalno. Dr. N. J. Cox, raziskovalec in svetovalec pri razvoju statističnega paketa Stata, meni, da je pri velikih vzorcih finančnih podatkov težko ohraniti zahtevo o normalnem porazdeljevanju ostankov. Obenem meni, da je njihova odklonskost v praksi lahko povsem drugotnega pomena oziroma je njihov vpliv na analizo zanemarljiv. Njegova trditev izhaja iz del več raziskovalcev. Med njimi White (1982, str. 1-25) pokaže, da pod določenimi pogoji uporaba predpostavke normalno porazdeljenih ostankov ne vpliva na pristranskost ocen.

Kadar uporabimo metodo največjega verjetja in je v njeni pripadajoči verjetnostni funkciji predpostavljeno, da se ostanki porazdeljujejo normalno, dejanski vzorčni ostanki pa se ne porazdeljujejo normalno, jo imenujemo psevdo oz. kvazi metoda največjega verjetja⁵⁶ (F. J. Fabozzi et al., 2007, str. 292).

Ocene, dobljene na podlagi QML, so praviloma manj natančne. Vendar pa cenilka QML ostaja konsistentna in asimptotično normalna. Ker ne poznamo prave porazdelitve časovne vrste in se ostanki porazdeljujejo nenormalno, obstaja možnost, da uporabljena cenilka

⁵³ Praktično to pomeni, da so povprečni in zelo ekstremni donosi indeksa SBI20 pogostejši, kot pa to predvideva normalna porazdelitev.

⁵⁴ Porazdelitev s koeficientom sploščenosti nižjim od tri pa imenujemo platikurtična porazdelitev (ang. *Platikurtic Distribution*).

⁵⁵ Ang. *Normal Mixture Density*.

⁵⁶ Ang. *Quasi Maximum Likelihood*.

največjega verjetja temelji na napačni-normalni porazdelitvi ostankov. V tem primeru je uporabljen metoda dejansko metoda kvazi največjega verjetja. Najverjetnejše so zato ocene parametrov manj natančne, vendar pa ostajajo asimptotično konsistentne in nepristranske.

8. Konstantna varianca ostankov ter test Lagrangevega multiplikatorja

Tipično finančni podatki izkazujejo leptokurtičnost, visok vrh in debele repe. Z vsebinskega vidika to pomeni, da so skrajni dogodki spremenljivk, ki se porazdeljujejo leptokurtično (ponazarjajo jih debeli repi porazdelitev), pogosteji oz. bolj verjetni, kot pa to predvideva normalna porazdelitev.

Izkaže se, da je učinek debelih repov in koničavosti posledica korelacije med zaporednimi vrednostmi pogojne variance oz. skupinjenja volatilnosti. Preprosto to pomeni, da v primeru ekstremnega donosa (pozitivnega ali negativnega) ali odklona donosnosti od pričakovane vrednosti danes, poveča verjetnost ekstremnega donosa in odklona jutri. Zaradi korelacije med zaporednimi vrednostmi volatilnosti se veliki odkloni dalj časa zadržujejo v repu porazdelitve, rep se »odebeli«.

Omenjene značilnosti modeliramo s pomočjo ARCH modelov. Kadar sumimo, da imajo naši podatki omenjene značilnosti, statistično preverimo, ali so ostanki resnično beli šum ali pa morda kljub temu vsebujejo še nekatere informacije, ki jih z ARIMA modelom nismo zajeli. V kolikor se izkaže, da ostanki niso popoln beli šum, s pomočjo ARCH⁵⁷ modelov pridobimo nove informacije o procesu.

Test Lagrangevega multiplikatorja preveri hipotezo, ali so kvadrirani ostanki neodvisno in identično porazdeljeni beli šum, nasproti alternativni hipotezi, ki pravi, da so ostanki generirani s strani nekega ARCH procesa:

$$\varepsilon_t^2 = \alpha_0 + \alpha_1 \varepsilon_{t-1}^2 + \dots + \alpha_q \varepsilon_{t-q}^2 + \nu_t \quad (47)$$

$$H_0 : \alpha_1 = \alpha_2 = \dots = \alpha_q \quad H_1 : \alpha_i > 0 \text{ za vsaj en } i = 1, 2, \dots, q \quad (48)$$

$$LM = TR^2 \quad (49)$$

LM statistika⁵⁸ se pod ničto hipotezo porazdeljuje v $\chi^2(q)$ porazdelitvi. V kolikor izračunana LM statistika presega toretično $\chi^2(q)$ vrednost, zavrnemo ničelno hipotezo o belem šumu ter sklenemo, da ostanki sledijo ARCH procesu⁵⁹. Hipotezo lahko preverimo tudi z F testom.

⁵⁷ V zadnjem času prihajajo v uporabo tudi modeli stohastične volatilnosti.

⁵⁸ Gornji obrazec za izračun LM statistike je poenostavljen in velja pod predpostavko, da se napake porazdeljujejo pogojno normalno. Za podrobnejši opis beri F. J. Fabozzi et al. (2003, str. 295).

⁵⁹ Seveda ob predpostavki, da je ARIMA model pravilno specificiran.

8.1 Praktičen primer

Že z uporabo prvega odloga kvadriranih ostankov pri vseh vzorcih zavrnemo ničelno hipotezo o belem šumu pri vsaj 2 % stopnji značilnosti (glej Tabelo 2 v Prilogi 8). Sklenemo, da so ostanki generirani z nekakšnim ARCH procesom. Kvadrati ostankov močno posnemajo gibanje pogojne variance, variance, definirane na kratkem časovnem intervalu. To pomeni, da pogojna varianca ni konstantna, iz podatkov lahko pridobimo nove informacije, ki jih ARIMA model ne posnema.

9. Nestanovitnost

Stanovitnost pomeni »stanje ali lastnost nespremenljivosti oz. stalnosti (<http://www.abecednik.com>).« Njena protipomenka - nestanovitnost - torej pomeni spremenljivost ali nestalnost.

V finančnih vedah se (morda tudi napačno) kot sopomenki nestanovitnosti uporablja tudi izraza volatilnost⁶⁰ in nihajnost. Pojem nestanovitnost v splošnem označuje nedeterministično oz. stohastično gibanje časovnih vrst⁶¹. V primeru finančnih časovnih vrst pa z nestanovitnostjo opisemo spremenljivost nihajnosti časovnih vrst. Pojav, kjer je nihajnost v določenih časovnih obdobjih v povprečju višja in v drugih časovnih obdobjih nižja kot v povprečju (glej npr. Sliko 2 na str. 6, obdobje po 31. avgustu).

9.1 Volatilnost

Poznamo več mer volatilnosti časovnih vrst⁶² in vsaka izmed njih skuša opisati, na kakšen način niha neka spremenljivka. Najpogosteje uporabljeni in splošno sprejeta mera volatilnosti časovnih vrst pa je varianca oz. standardni odklon. Varianca meri razpršenost spremenljivke okoli njene povprečne vrednosti⁶³, kot je razvidno iz enačbe (50). Varianca je izražena kot kvadrat povprečnega odklona. Da bi lahko primerjali varianco spremenljivke z njeno opazovano vrednostjo, uporabljamo koren variance - standardni odklon:

$$\sigma^2 = \frac{\sum_{t=1}^T (Y_t - \bar{Y})^2}{T} \quad (50)$$

$$\sigma = \sqrt{\sigma^2} \quad (51)$$

Pojmi volatilnost, varianca ter standardni odklon so tesno povezani s pojmom tveganosti. V finančnem svetu tveganost pomeni negotovost prihodnjih cen in donosov finančnih instrumentov. Donos od vložka v vrednostni papir je tvegan. Pričakovani donos, kakorkoli ga že izračunamo, ni skoraj nikoli enak realiziranemu. V financah pričakovani donos velikokrat

⁶⁰ Ang. *Volatility*.

⁶¹ Seveda lahko opisuje tudi nefinančne časovne vrste in druge statistične podatke.

⁶² Npr.: kvartilni razmik, mere, ki opisujejo porazdelitev repov, povprečni absolutni nihaj ...

⁶³ Spodnji obrazec se nanaša na diskretno spremenljivko, kjer vsaki opazovani vrednosti, ki nastopa v izračunu variance, pripisujemo enako verjetnost.

izračunamo kot neko srednjo/pričakovano vrednost⁶⁴, medtem ko dejanski donosi nihajo okoli te vrednosti. Močneje kot dejanski donosi nihajo okoli srednje pričakovane vrednosti, bolj negotovi so. Ker je varianca mera nihanja pojava okoli svoje srednje vrednosti, je obenem tudi mera negotovosti ali tveganosti. Zato varianco v financah uporabljam kot »izvedeno⁶⁵« oz. posredno, s številkami izraženo mero za tveganje.

Kot je razvidno iz grafa dnevnih donosov indeksa SBI20 (Slika 2 na str. 6), je njegova povprečna dnevna vrednost približno konstantna. Vendar pa v določenih obdobjih donosi nihajo močneje in v določenih šibkeje okoli povprečne vrednosti. V kolikor bi izračunali variance v podobdobjih (npr. desetdnevne variance), bi ugotovili, da je varianca v obdobjih visoke volatilnosti donosov večja kot v relativno mirnih obdobjih. Ta obdobja so tudi bolj tvegana obdobja. Ljudje smo nenaklonjeni tveganju⁶⁶, prihodnost pa je negotova. Tveganje, ki ga sprejmemo danes, ni nujno tudi tveganje, kateremu bomo izpostavljeni jutri. Zato bi si žeeli poznati jutrišnje tveganje. Je možno iz poznavanja današnjega in preteklega tveganja sklepati o izpostavljenosti tveganju jutri?

Volatilnost⁶⁷ vsebuje inercijo, kar implicira, da je volatilnost pojav, ki izkazuje določen vzorec (skupinjenje ravni volatilnosti), vzorce pa lahko posnemamo, modeliramo. Modeliranje nestanovitnosti oz. spremjanja volatilnosti je torej ključnega pomena pri ugotavljanju ter napovedovanju tveganosti. Uveljavljeni modeli, ki zmorejo prav to, se imenujejo ARCH modeli.

9.2 Stilizirana dejstva

Standardna predpostavka regresijske analize se imenuje homoskedastičnost. Homoskedastičnost pomeni, da je varianca odklonov oz. napak konstantna. Od odklonov se torej pričakuje, da skozi čas variirajo oz. nihajo enakomerno. Vendar nihanje slučajnih napak skozi krajša obdobia pogosto ni enakomerno. Pravimo, da se napake v krajišem obdobju obnašajo heteroskedastično.

ARIMA modeli teh značilnosti niso sposobni zajeti. Zato v finančni ekonometriji (in drugih nedeterminističnih znanostih) uporabljam avtoregresijske modele za modeliranje pogojne variance⁶⁸. Pogojna varianca je varianca, odvisna od časa, lahko bi jo imenovali tudi kratkoročna varianca. Nihanje pogojne variance slučajnih napak je pod določenimi predpostavkami analogno nihanju pogojne variance odvisne spremenljivke. Nihanje, ki ga matematično predstavlja varianca, v finančni teoriji pa služi kot nadomestek za tveganost finančnega instrumenta, modeliramo s pomočjo modelov iz družine ARCH⁶⁹.

Gibanje finančnih časovnih vrst lahko okarakteriziramo s sledečimi stiliziranimi dejstvi (Fabozzi et al., 2007, str. 280):

- Volatilnost je v nekaterih obdobjih višja in v nekaterih nižja, je nestanovitna. To imenujemo skupinjenje volatilnosti⁷⁰ ali ARCH učinek.

⁶⁴ Naj si bo aritmetična sredina, modus ali mediana.

⁶⁵ Ang. *Proxy Measure*.

⁶⁶ Ang. *Risk Averse*.

⁶⁷ V tem primeru seveda govorimo o pogojni volatilnosti, kjer volatilnost pojmujemo v krajišem obdobju.

⁶⁸ Ang. *Conditional Variance*.

⁶⁹ Ang. *Autoregressive Conditional Heteroskedasticity*.

⁷⁰ Ang. *Volatility Clustering*.

- Donosi finančnih instrumentov se ne porazdeljujejo v standardizirani normalni porazdelitvi, temveč imajo debelejše repe ter višje vrhove. Porazdeljujejo se v leptokurzični obliki.
- Avtokorelacija donosov je nizka. To pomeni, da so donosi slabo napovedljivi.
- Donosi se močneje odzivajo na negativne kot na pozitivne informacije. V obdobju, v katerem prevladujejo negativne informacije, predstavljajo jih negativni slučajni odkloni, je volatilnost praviloma večja. Ta pojav imenujemo »učinek vzvoda⁷¹«.
- Avtokorelacija absolutnih ali kvadriranih donosov (in ostankov) izzveni zelo počasi. Kar na primer pomeni, da je po enkratnem negativnem šoku (slabi novici) pogojna varianca še dolgo časa višja od povprečne ali brezpogojne variance (višje tveganje je prisotno dalj časa). To imenujemo »učinek dolgega spomina⁷²«.

Običajni modeli ne zmorejo posnemati stiliziranih dejstev. Modeliramo jih z modeli družine ARCH.

10. ARCH

Zgodovina ARCH modelov se prične z Engle-om leta 1982. Engle v članku »Autoregressive Conditionall Heteroscedasticity with Estimates of the Variance of U.K. Inflation« (1982, str. 987-1008) prvič v zgodovini ekonometrije predstavi eleganten model, ki je sposoben posnemati pogojno volatilnost. ARCH modeli so namenjeni modeliranju pogojne variance, ki je skrita, »neopazovana« spremenljivka, odvisna od časa, v katerem jo opazujemo. Modeliramo jo s pomočjo preteklih vrednosti slučajnih napak, kot je utemeljeno v nadaljevanju.

Osnoven ARCH model je sila podoben AR procesu, ki smo ga spoznali pri modeliranju pričakovane ali srednje vrednosti donosov. Z ARIMA modeli modeliramo pogojne (srednje) srednje vrednosti ($E(y_t)$, t.j. pričakovane vrednosti donosov) z ARCH modeli pa pogojno varianco (h_t , t.j. volatilnost donosov). Pravimo tudi, da so ARIMA modeli namenjeni modeliranju prvih momentov (prvi moment je matematična definicija pričakovane vrednosti) in ARCH modeli modeliranju drugih momentov (drugi moment je matematična definicija variance).

ARCH model, podobno kot AR model s pomočjo odloženih vrednosti kvadriranih slučajnih napak (ε^2), modelira pogojno varianco slučajnih napak (h_t). Z matematičnimi simboli ARCH(q) model opišemo na sledeč način (Fabozzi et al., 2007, str. 281):

$$y_t = \varepsilon_t \quad (52)$$

$$\varepsilon_t = \sqrt{h_t} \eta_t \quad \eta_t \stackrel{i.i.d.}{\sim} N(0,1) \quad (53)$$

$$h_t = a_0 + \sum_{i=1}^q a_i \varepsilon_{t-i}^2 \quad (54)$$

⁷¹ Ang. Leverage Effect.

⁷² Ang. Long Memory Effect.

Kjer h_t predstavlja pogojno varianco slučajnih napak (ε_t). Pogojna se imenuje, ker je pogojevana na informacijah dostopnih do trenutka t ; $(h_t | I_t)$. Brezpogojna varianca (h) bi bila izračunana na podlagi vseh informacij $(h | I_T)$ oziroma vseh opazovanj v vzorcu. Z ARCH modeli modeliramo obnašanje slučajnih napak (ε_t). Natančneje - modeliramo njihovo varianco v odvisnosti od časa, medtem ko je njihova pričakovana (srednja) vrednost po definiciji enaka nič ($E(\varepsilon)=0$).

Enačbo (52), ki predstavlja pričakovano (srednjo) vrednost osnovne časovne vrste, po potrebi razširimo s kompleksnejšim ARIMA modelom.

Iz enačbe (53) je razvidno, da lahko proces generiranja slučajnih napak $\{ \varepsilon_t \}$ ločimo na dva procesa.

Prvi proces predstavlja slučajna spremenljivka eta (η_t). η_t je definirana kot spremenljivka, ki se porazdeljuje normalno s sredino enako 0 in konstantno varianco 1. Sredini slučajne napake (ε_t) in spremenljivke η_t sta torej enaki. Prva lastnost procesa generiranja slučajne napake, da niha in ima pričakovano vrednost enako nič, je torej zadovoljena.

Vendar pa vemo, da slučajne napake (ε_t) nihajo v odvisnosti od časa. V volatilnih obdobjih nihajo močneje kot v mirnih obdobjih, njihova pogojna varianca je v volatilnih obdobjih visoka in nizka v mirnih obdobjih. Spremenljivka η_t niha enakomerno, njena varianca je konstantna ($\sigma=1$). V tem pogledu se spremenljivki η_t in ε_t razlikujeta.

Zato moramo nekako transformirati variabilnost naključne spremenljivke η_t tako, da bo transformirana spremenljivka η_t nihala kratkoročno heteroskedastično v odvisnosti od časa, kot nihajo slučajne napake (ε_t). To dosežemo tako, da spremenljivko η_t pomnožimo s pogojnim standardnim odklonom spremenljivke ε_t (t.j. $\sqrt{h_t}$). Rezultat je proces, ki ima sredino enako nič, ter pogojno varianco odvisno od časa. Natanko takšne lastnosti ima proces slučajnih napak $\{ \varepsilon_t \}$.

Slučajna spremenljivka η_t torej predstavlja naključno spremenljivko, ki varianco prevede v slučajno napako. Predpostavili smo, da se spremenljivka η_t porazdeljuje v standardizirani normalni porazdelitvi, $\eta_t \sim N(0,1)$. Zato se tudi spremenljivka ε_t porazdeljuje pogojno normalno; $\varepsilon_t \sim N(0, \sigma_t^2)$. V tem primeru velja:

$$E(\varepsilon_t^2 | I_{t-1}) = E(h_t \eta_t^2 | I_{t-1}) = h_t E(\eta_t^2 | I_{t-1}) = h_t \quad (55)$$

Pri gornji izpeljavi smo upoštevali dejstvo, da je pričakovana vrednost kvadrata normalno porazdeljene η_t spremenljivke po definiciji enaka ena:

$$\eta_t \sim N(0,1) \rightarrow E(\eta_t^2 | I_{t-1}) = 1 \quad (56)$$

ARCH modeli črpajo svojo moč iz enačbe (55). Le-ta pravi, da so kvadrirane vrednosti slučajnih napak (ε_t^2) nepristranske cenilke pogojne variance (h_t).

Ker so kvadrati odlogov ostankov avtokorelirani, to pomeni, da lahko s pomočjo kvadrata ostanka predhodnega obdobja (ε_{t-1}^2) napovemo vrednost kvadrata ostanka v obdobju t (ε_t^2). In ker je pogojna varianca (h_t) enaka pogojni pričakovani vrednosti kvadratov ostankov ($E(\varepsilon_t^2|I_{t-1})$), lahko sklenemo, da je tudi pogojna varianca korelirana z odlogi kvadratov slučajnih napak (ε_{t-1}^2). S tem smo utemeljili, zakaj lahko z odlogi kvadratov ostankov (ε_{t-1}^2) elegantno modeliramo pogojno varianco (h_t).

Varianca lahko zavzame samo pozitivne vrednosti. Ker varianca ne sme postati negativna (negativna volatilnost ne obstaja), moramo za regresijske koeficiente ARCH modela sprejeti omejitve. Vsi regresijski koeficienti morajo biti večji od nič:

$$a_0 > 0 \quad \text{in hkrati} \quad 0 \geq a_i > 1 \text{ za } i = 1, \dots, q \quad (57)$$

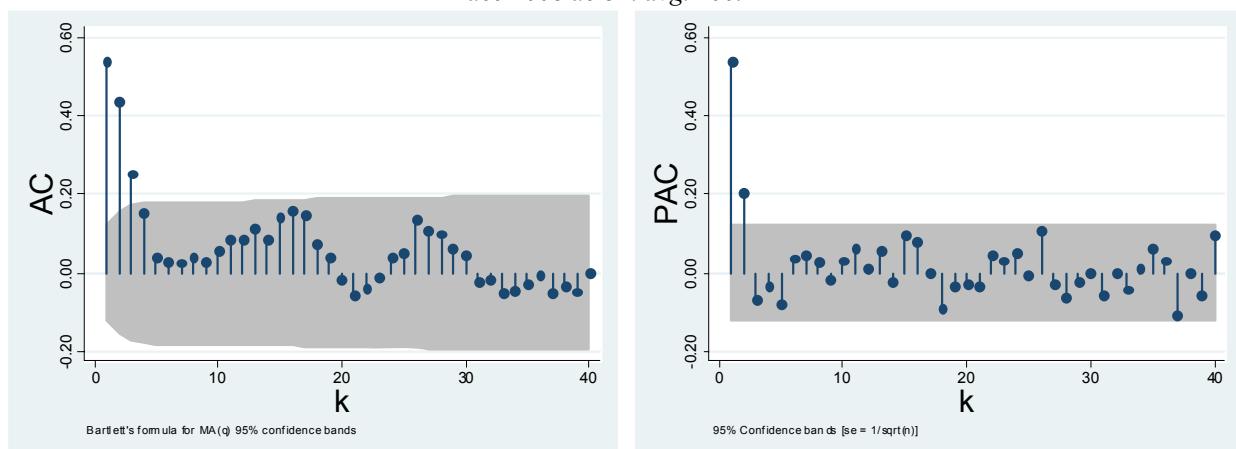
Obstajajo tudi druge omejitve, ki zagotavljajo, da ima pogojna varianca končno sredino in končne momente višjega reda (o omejitvah višjih redov piše Tsay (2002, str. 84-86)).

Iz enačbe (54) je razvidno, da v ARCH modelu velikim slučajnim odklonom (ε^2) oziroma inovacijam, kot jih včasih imenujemo, sledi visoka pogojna varianca (h_t), oz. volatilnost/tveganost. Na ta način ARCH modeli posnemajo nestanovitnost ter skupinjenje volatilnosti skozi čas.

10.1 Praktičen primer

Pokazali smo že, da odlogi slučajnih napak niso korelirani, kar pa ne pomeni, da niso korelirani tudi kvadrati odlogov. Spodnji sliki prikazujeta korelacijski funkciji kvadratov ostankov ARIMA modela največjega vzorca (grafi drugih vzorcev: Priloga 09, Slike 1-8):

Slika 6: Avtokorelacijska in delna avtokorelacijska funkcija kvadratov ostankov MA(1) modela s konstanto, 24. dec 2008 do 31. avg. 2009



Vir: Podatkovna baza Ljubljanske borze, 2009.

Iz grafov je razvidno, da so kvadrati ostankov avtokorelirani. Enako smo dokazali s pomočjo testa Lagrangevega multiplikatorja (glej poglavje Konstantna varianca ostankov ter test Lagrangevega multiplikatorja).

10.2 Lastnosti ARCH procesa

Lastnosti ARCH procesov zaradi enostavnosti predstavljamo skozi prizmo ARCH procesa prvega reda, ARCH(1) (Fabozzi et al., 2007, str. 282-283):

1. Brezpogojna pričakovana vrednost slučajnih napak in pričakovana vrednost pogojnih slučajnih napak sta enaki nič:

$$E(\varepsilon_t) = E(E(\varepsilon_t | I_{t-1})) = E(E(\sqrt{h_t} \eta_t | I_{t-1})) = E(\sqrt{h_t} E(\eta_t)) = 0 \quad (58)$$

2. Pogojna varianca slučajne napake je enaka:

$$E(\varepsilon_t^2 | I_{t-1}) = h_t = a_0 + a_1 \varepsilon_{t-1}^2 \quad (59)$$

3. Brezpogojna varianca oziroma pričakovana vrednost pogojnih varianc je konstantna in enaka⁷³:

$$\text{Var}(\varepsilon_t) = E(\varepsilon_t^2) = E(E(\varepsilon_t^2 | I_{t-1})) = E\left[E(a_0 + a_1 \varepsilon_{t-1}^2)\right] = E(a_0 + a_1 \varepsilon_{t-1}^2) = a_0 + a_1 E(\varepsilon_{t-1}^2) = \frac{a_0}{1-a_1} \quad (60)$$

4. Vrednost koeficiente sploščenosti slučajnih napak je večja od normalne:

$$K_\varepsilon = \frac{E(\varepsilon_t^4)}{[\text{Var}(\varepsilon_t)]^2} = \frac{E(\varepsilon_t^4)}{[E(\varepsilon_t^2)]^2} = 3 \frac{1-a_1^2}{1-3a_1^2} > 3 \quad (61)$$

Ugotovitve je moč posplošiti tudi na ARCH modele višjega reda. ARCH modeli so torej sposobni modelirati skupinjenje volatilnosti (2. lastnost), leptokurzičnost (4. lastnost), stacionarnost (1. in 3. lastnost) ter pogojno varianco, ki je odvisna od časa (2. lastnost).

ARCH modeli so pomenili prvi korak k posnemanju specifičnih lastnosti finančnih časovnih vrst (primerjaj stilizirana dejstva na str. 34 z lastnostmi ARCH procesa). Kljub genialnemu preskoku v modeliranju časovnih vrst ARCH modeli trpijo za nekaterimi pomanjkljivostmi. Tsay (2002, str. 86) in Fabozzi et. al. (2007, str. 284) navajata sledeče:

- Pogojna varianca je modelirana s pomočjo kvadriranih ostankov, ε^2 . Ker ostanki v model vstopajo v kvadrirani obliki, model ne razlikuje med pozitivnimi in negativnimi ostanki. Pogojna varianca se na pozitiven ali negativen kvadriran ostanek odzove enako močno, simetrično. Ostanki predstavljajo šoke. V realnosti se časovne vrste močneje odzovejo na negativne kot pa pozitivne šoke. Volatilnost oz. pogojna varianca bi se morala močneje odzvati na negativne šoke.
- Kot pri AR modelih je težko določiti red odlogov q. Več modelov z različnimi odlogi lahko proces pojasni dokaj enako.

⁷³ Ker je $\{\varepsilon_t\}$ stacionaren proces, velja, da so brezpogojne variance v vsakem trenutku enake ($\text{Var}(\varepsilon_t) = \text{Var}(\varepsilon_{t-1}) = E(\varepsilon_{t-1}^2)$).

- Vpliv tako velikih kot majhnih odklonov slučajnih napak traja q-obdobj. V realnosti veliki odkloni determinirajo volatilnost dlje časa kot pa majhni odkloni.
- ARCH modeli ne pripomorejo k razumevanju vzrokov volatilnosti finančnih časovnih vrst. So zgolj »mehaničen« opis gibanja volatilnosti, ne vsebujejo teoretične vzročne posledične zveze kot npr. strukturni modeli.
- ARCH modeli ob majhnih odklonih precenijo volatilnost, obenem pa se na velike izolirane šoke odzovejo prepočasi.

Nekatere izmed pomanjkljivosti lahko odpravimo z uporabo GARCH modelov.

11. GARCH

ARCH model je relativno preprost. Vendar pa je v praksi velikokrat potrebno veliko število odlogov, da zadovoljivo ocenimo volatilnost. Tsay (2002, str. 93) navaja, da je bilo potrebno pri modeliranju volatilnosti indeksa S&P500 uporabiti ARCH model devetega reda. Procese modeliramo, ker so kompleksni in jih je potrebno za kakršnokoli praktično delo izraziti v obvladljivi abstraktni obliku. Kadar je proces mogoče enako dobro ponazoriti s preprostim modelom, ima preprost model prednost. Z vidika kompleksnosti modela, ki je potreben, da opiše proces, je GARCH model (ne vedno) enostavnejši od ARCH modela, medtem ko podatke opiše vsaj enako zadovoljivo.

V ARCH modelu so pogojne variance (h_t) ocnjene na podlagi preteklih vrednosti slučajnih napak (npr. ε_{t-1}^2). Torej je tudi odložena pogojna varianca (h_{t-1}) ocnjena na podlagi preteklih vrednosti slučajnih napak (npr. ε_{t-2}^2). Zato je smiselno, da namesto velikega števila odlogov preteklih slučajnih napak med pojasnjevalne spremenljivke vključimo kar odložene vrednosti pogojne variance (h_{t-1}) in s tem implicitno v model vključimo tudi višje odloge slučajnih napak. Ko jih vključimo v model volatilnosti, s tem izničimo potrebo po velikem številu odlogov slučajnih napak, saj so te vgrajene v odložene vrednosti pogojne variance.

Bollerslev je leta 1986 predlagal modifikacijo ARCH modela, pri kateri v model vključimo odložene vrednosti pogojne variance same. Tovrstni model imenujemo generalizirani ARCH⁷⁴ model, skrajšano - GARCH model. Tako kot je ARCH model analogen AR modelu, je GARCH(q,p) model analogen ARMA modelu (Fabozzi et. al., 2007, str. 284):

$$\varepsilon_t = \sqrt{h_t} \eta_t \quad \eta_t \stackrel{i.i.d.}{\sim} N(0,1) \quad (62)$$

$$h_t = a_0 + \sum_{i=1}^q a_i \varepsilon_{t-i}^2 + \sum_{j=1}^p b_j h_{t-j} \quad (63)$$

Q in p predstavlja število odlogov kvadriranih ostankov ter preteklih pogojnih varianc. Ker varianca po definiciji ne sme zavzeti negativnih vrednosti, morajo koeficienti zadostiti nekaterim omejitvam (Tsay, 2002, str. 93):

⁷⁴ Ang. *Generalized ARCH model*.

$$a_0 > 0 \text{ in hkrati } a_i \geq 0 \text{ za } i = 1, \dots, q \quad b_j \geq 0 \text{ za } j = 1, \dots, p \quad (64)$$

Pogojna varianca se giblje v odvisnosti od časa, brezpogojno varianca pa mora ostati konstantna. Da zagotovimo končno vrednost brezpogojne variance, mora biti vsota vrednosti regresijskih koeficientov strogo manjša od ena (Tsay, 2002, str. 93):

$$\sum_{i=1}^{\max(p,q)} (a_i + b_i) < 1 \quad (65)$$

Obstajajo tudi druge omejitve, ki se nanašajo na momente višjih redov (za primer GARCH (1,1) modela glej Fabozzi et al. (2007, str. 286-289)).

12. Ostale različice modelov družine ARCH

ARCH in GARCH modeli so primerni za modeliranje nestanovitnosti, ker (delno) zajamejo nekatere njene lastnosti. Ostala so še nekatera empirična dejstva, ki jih z do sedaj predstavljenima modeloma ni mogoče zajeti. Obstaja veliko različic ARCH in GARCH modelov, ki so namenjeni modeliranju drugih specifičnih lastnosti:

- Asimetrične odzive na negativne in pozitivne šoke modeliramo z različnimi oblikami pragovnih⁷⁵ modelov: eksponentni (npr. Nelsonov E-GARCH model) in pragovni modeli (npr. Zokianov TARCH in GJR-ARCH model).
- Dolg spomin pogojne variance modeliramo z delno integriranimi modeli⁷⁶ oz. IARCH/IGARCH, FIARCH/FIGARCH in LMARCH/LMGARCH modeli.
- Kjer je leptokurzičnost napak in donosov finančnih časovnih močno izrazita, jih ARCH/GARCH modeli zajamejo le delno. ARCH-t/GARCH-t modeli zato namesto predpostavke o normalni porazdelitvi spremenljivke η vključujejo predpostavko, da se spremenljivka η porazdeljuje studentovi-t porazdelitvi. Studentova t porazdelitev nižjih stopinj prostosti bolje opiše leptokurzičnost donosov in ostankov.

Zgoraj našteti modeli družine ARCH so zgolj nekateri izmed najpogosteje navajanimi modeli. Bollerslev (2008, str. 1-31), dobitnik Nobelove nagrade za ekonomijo leta 2003 in oče GARCH modela, v delu Glossary to ARCH (GARCH) porabi kar 31 strani za naštevanje različic ARCH modelov.

12.1 Asimetrični GARCH modeli

12.1.1 Nelsonov E-GARCH model

Do sedaj obravnavani ARCH modeli ne razlikujejo med pozitivnimi in negativnimi vrednostmi slučajnih napak. Te predstavljajo pozitivne in negativne informacije, ki v realnosti različno močno vplivajo na volatilnost. Volatilnost se na pozitivne in negativne novice ne odziva enako, simetrično. Zaradi negativnih (pozitivnih) novic se pogojna varianca zviša (zniža), odzove se asimetrično.

D. Nelson je leta 1991 v delu »Conditional Heteroscedasticity in Asset Returns: A new Approach« predstavil model, ki je sposoben razlikovati med pozitivnimi in negativnimi šoki.

⁷⁵ Ang. *Threshold Models*.

⁷⁶ Ang. *Fractionally Integrated Models*.

Imenuje se eksponentni⁷⁷ GARCH model, E-GARCH, in je model nelinearne oblike pogojne variance⁷⁸ (Tsay, 2002, str. 102 in Fabozzi et al., 2007, str. 301):

$$\varepsilon_t = \sqrt{h_t} \eta_t \quad (66)$$

$$\log(h_t) = a_0 + \sum_{i=1}^q a_i g(\eta_{t-i}) + \sum_{i=1}^p b_i \log(h_{t-i}) \quad (67)$$

$$g(\eta_t) = \theta \eta_t + \gamma [|\eta_t| - E|\eta_t|] \quad (68)$$

Funkcija $g(\eta_t)$ modelira asimetričen odziv na pozitivne in negativne standardizirane ostanke. Prvi člen funkcije $g(\eta_t)$ (t.j. $\theta \eta_t$) modelira učinek predznaka ostankov. Vrednost regresijskega koeficiente θ je negativna⁷⁹. Skupaj z negativnim odklonom povečujeta funkcijo $g(\eta_t)$ in s tem pogojno varianco (h_t). Obratno pa pozitiven ostanek zmanjšuje pogojno varianco.

Drugi člen ($\gamma [|\eta_t| - E|\eta_t|]$) pa modelira učinek velikosti ostanka. Učinek velikosti ostanka je izražen kot razlika med njegovo absolutno vrednostjo ($|\eta_t|$) in pričakovano absolutno vrednostjo ($E|\eta_t|$). Kadar je šok močan in je absolutna slučajna napaka velika, ima drugi člen pozitiven predznak in povečuje pogojno varianco.

Funkcija $g(\eta_t)$ je zapisana v splošni obliki. Kadar pa predpostavimo, da se η_t porazdeljuje normalno, se enačba za pogojno varianco spremeni v⁸⁰ (Brooks, 2008, str. 406):

$$\log(h_t) = a_0 + a_1 \frac{\varepsilon_{t-1}}{\sqrt{h_{t-1}}} + c_1 \left(\frac{|\varepsilon_{t-1}|}{\sqrt{h_{t-1}}} - \sqrt{2/\pi} \right) + b_1 \log(h_{t-1}) \quad (69)$$

Asimetričen odziv pa ni edina prednost E-GARCH modela. Ker vanj pogojna varianca vstopa v obliki logaritma ($\log(h_t)$), lahko regresijski parametri zavzamejo negativne vrednosti. Tipično zavzamejo negativno vrednost parametri pri odloženih standardiziranih slučajnih odklonih (a_i ; $i > 0$). Vendar pa to ne predstavlja problema, saj je pogojna varianca v nelogaritmizirani obliki enaka:

$$h_t = e^{\log(h_t)} \quad (70)$$

Definicijsko območje eksponentne funkcije e^x je pozitivno ($e^x > 0$; za $x \in \mathbb{R}$). Pogojna varianca E-GARCH modela je tako vedno pozitivna (od tod tudi ime modela).

⁷⁷ Ang. *Exponential GARCH*.

⁷⁸ Izraz se nanaša na nelinearnost v spremenljivkah, regresijski koeficienti pa ostajajo linearne oblike.

⁷⁹ V kolikor je ni, je to lahko znak, da je z modelom nekaj narobe.

⁸⁰ Ker je $\eta_t \sim N(0,1)$ velja: $E|\eta_t| = \sqrt{2/\pi}$.

12.1.2 Pragovni GARCH modeli

Obstaja več vrst pragovnih GARCH modelov, T-GARCH, katerih skupna značilnost je, da vsebujejo indikatorsko funkcijo, ki loči vpliv pozitivnih in negativnih slučajnih odklonov. Splošna oblika pragovnih modelov je sledeča (Mills, 1999, str. 137 in 152):

$$h_t^\gamma = a_0 + \sum_{i=1}^q a_i g^{(\gamma)}(\varepsilon_{t-i}) + \sum_{j=1}^p b_j h_{t-j}^\gamma \quad (71)$$

Kjer je $g^{(\gamma)}(\varepsilon_{t-i})$ nek člen ARCH družine, ki vsebuje indikatorsko funkcijo ($I(\varepsilon_t)$), ki ločuje vpliv pozitivnih in negativnih šokov:

$$g^{(\gamma)}(\varepsilon_t) = \theta |\varepsilon_t|^\gamma I(\varepsilon_t) \quad (72)$$

$$I(\varepsilon_t) = \begin{cases} 1 & \text{kadar je } \varepsilon_t > 0 \\ 0 & \text{drugače} \end{cases} \quad (73)$$

Gamma (γ) predstavlja neko realno število. V kolikor je $\gamma=1$ govorimo o Zakoian-ovem (1994) T-GARCH (p,q) modelu⁸¹:

$$\sqrt{h_t} = a_0 + \sum_{i=1}^q d_i |\varepsilon_{t-i}| + \sum_{i=1}^q c_i |\varepsilon_{t-i}| I(\varepsilon_{t-i}) + \sum_{i=1}^p b_i \sqrt{h_{t-i}} \quad (74)$$

Pogosteje pa se uporablja model, v katerem γ zavzame vrednost 2. Govorimo o Glosten, Jagannathan, Runkle (1993) GJR-GARCH modelu (Brooks, 2008, str. 405):

$$h_t = a_0 + \sum_{i=1}^q a_i \varepsilon_{t-i}^2 + \sum_{i=1}^p b_i h_{t-i} + \sum_{i=1}^z c_i \varepsilon_{t-i}^2 I(\varepsilon_{t-i}) \quad (75)$$

Obstaja še veliko drugih različic pragovnih ARCH modelov.

12.1.3 Nelinearni ali potenčni GARCH model

Nelinearni ali potenčni Garch model, NARCH⁸² ali PARCH⁸³, sta prva uporabila Engle in Bollerslev leta 1986. Model dopušča, da so odlogi ostankov potencirani z lastno spremenljivko (γ):

$$h_t = a_0 + \sum_{i=1}^q a_i |\varepsilon_{t-i}|^\gamma + \sum_{i=1}^p b_i h_{t-i} \quad (76)$$

Gamma, γ , vstopa v model kot dodatna spremenljivka, ki jo je potrebno modelirati. Tipično je vrednost γ manjša od dve in večja od ena, kar lahko tolmačimo, kot da pogojna varianca ne razlikuje med jakostjo odklonov tako »močno«, kot to predлага ARCH model. Obstajajo tudi

⁸¹ Alternativno se imenuje ZARCH ali ZGARCH.

⁸² Ang. *Non-linear ARCH*.

⁸³ Ang. *Power ARCH*.

modeli, kjer so odlogi pogojne variance prav tako potencirani z γ (glej npr. Bera in Higgins, 1992, 137-158).

12.2 Modeli družine ARCH-t

Predhodno poglavje predstavlja nekatere najpogosteje uporabljeni modele družine ARCH. Predhodni ARCH modeli so bili izgrajeni pod predpostavko normalno porazdeljenih ostankov (predpostavka: $\eta_t \sim N(0,1)$), z varianco, ki je odvisna od časa (h_t). Kljub temu da smo predpostavili pogojno normalno porazdelitev ostankov, so bili dobljeni brezpogojni momenti nenormalni. Natančneje, brezpogojna porazdelitev ostankov in pričakovanih donosov je postala leptokurtična, kot se tudi spodobi za finančne časovne vrste. Vendar pa uporaba ARCH modelov le delno zajame leptokurtičnost časovnih vrst, npr. porazdelitev donosov se še močneje razlikuje od normalne porazdelitve, kot pa to predvidevajo ARCH modeli.

Z uporabo alternativne specifikacije slučajnih napak lahko modele izboljšamo⁸⁴. To storimo tako, da funkciji η_t pripisemo neko alternativno porazdelitev, ki bolje posnema leptokurtičnost, kakršno izkazujejo finančni donosi. Studentova t porazdelitev (primernih stopinj prostosti) za razliko od standardizirane normalne porazdelitve bolje odraža leptokurtičnost. Zato ARCH modeli modificiramo tako, da predpostavimo:

$$\varepsilon_t = \sqrt{h_t} \eta_t \quad \eta_t \sim t(v) \quad (77)$$

Kjer se naključna spremenljivka η_t porazdeljuje v Studentovi t porazdelitvi z v stopinjam prostosti. Ponavadi predpostavimo simetrično Studentovo porazdelitev sledeče oblike:

$$\mu = 0, \quad \sigma^2 = 1, \quad S = 0, \quad K = \frac{6}{v - 4} \quad (78)$$

Od normalne porazdelitve se razlikuje v sploščenosti (K), ki je odvisna od stopinj prostosti (v). Da bi bila sploščenost dobro definirana, morajo biti stopinje prostosti višje od 4. Z višanjem stopinj prostosti se Studentova-t porazdelitev približuje normalni porazdelitvi. Pri vrednostih $d \geq 40$ je Studentova-t porazdelitev praktično enaka standardizirani normalni porazdelitvi.

Oblike ARCH-t modelov so enake kot pri ARCH modelih. Razlikujejo se samo v tem, da se slučajna spremenljivka η_t porazdeljuje v Studentovi t porazdelitvi.

13. Cenilke modelov

Regresijske koeficiente modelov lahko ocenimo z več metodami in njim pripadajočimi cenilkami⁸⁵ modelov. Aplikativno najenostavnejša ter zelo učinkovita metoda je metoda najmanjših kvadratov⁸⁶, ki ob določenih predpostavkah velja za najboljšo linearno

⁸⁴ Za primerjavo učinkovitosti alternativnih specifikacij porazdelitev ostankov ter metod glej: Verhoeven&McAleer, 2003 in Goorbergh&Vlaar, 1999.

⁸⁵ Ang. *Estimators*.

⁸⁶ Ang. *Least Squares Method (LS)*.

nepristransko cenilko regresijskih koeficientov⁸⁷. Zakaj torej v pričujoči diplomski nalogi ni uporabljen elegantna metoda najmanjših kvadratov (v nadaljevanju MNKV)?

Prvič, ena izmed predpostavk, ki mora biti izpolnjena, da lahko MNKV uspešno uporabimo v praksi, se nanaša na varianco časovne vrste. MNKV predpostavlja, da je tudi pogojna varianca slučajnih napak konstantna in neodvisna od časa (Gujarati, 2003, str. 61):

$$\sigma_{t,e}^2 = \sigma_e^2 = \text{const.} \quad (79)$$

V kolikor predpostavka ne drži, MNKV ni cenilka z najmanjšo varianco, kljub temu pa ostaja nepristranska⁸⁸.

Finančne časovne vrste tipično kršijo splošne predpostavke klasične MNKV. Vendar pa je z uporabo transformacij podatkov problem možno obiti. Povedano drugače, MNKV lahko uporabimo pri ocenitvi ARIMA regresijskih modelov, vendar pa jo je potrebno prilagoditi.

Drugi problem se nanaša na izračun parametrov premikajočega povprečja, na MA koeficiente. Pri izračunu ocene parametrov minimiziramo vsoto kvadratov odklonov tako, da jih odvajamo po danih regresijskih koeficientih in izenačimo z nič. Vendar pa koeficienti premikajočega povprečja v enačbo ne vstopajo v kvadrirani obliki. Posledično pogoji prvega reda pri MA koeficientih niso linearne enačbe, zato enačbe nimajo enotnih rešitev zaprtega tipa. Potrebno je uporabiti iterativne postopke reševanja enačb, tako kot pri uporabi cenilke največjega verjetja. MNKV izgubi svojo ključno prednost proti drugim metodam, to je enostavnost.

Tretjič, ARIMA-GARCH modeli so linearni v sredini (ARIMA del) in nelinearni v varianci (GARCH del). Metoda največjega verjetja⁸⁹ (v nadaljevanju ML) je fleksibilnejša in ima pri ocenjevanju nelinearnih modelov privlačnejše matematične lastnosti.

Četrtič, Yilmazkuday, ki povzema Englea, pravi, da je ML metoda je v primeru prisotnosti korelacije med ostanki učinkovitejša od MNKV (str. 19, b.l.).

14. Metoda največjega verjetja

ML cenilka maksimizira verjetnost vzorca glede na teoretično verjetnostno porazdelitev, ki jo pripisemo vzorcu, in sicer tako, da določi optimalno vrednost regresijskih parametrov:

$$\max. \quad p(y|\theta^*) \quad (80)$$

Kjer θ^* predstavlja optimalni vektor regresijskih parametrov in y dani vzorec. Povedano drugače, predstavljamo si, da je bil naš vzorec generiran iz neke teoretične porazdelitve, ki vsebuje vektor parametrov θ . Princip največjega verjetja pravi, da mora ocena vektorja regresijskih parametrov θ maksimizirati verjetnost, da bi iz predpostavljene teoretične porazdelitve naključno izvlekli vzorec, ki je enak našemu dejanskemu vzorcu. Metoda ML z iterativnimi postopki spreminja vrednost vektorja parametrov θ , vse dokler ne določi takšne vrednosti parametrov (θ^*), za katere je verjetnost vzorca najvišja.

⁸⁷ Ang. *Best Linear Unbiased Estimator (BLUE)*.

⁸⁸ V tem primeru lahko MNKV nekoliko prilagodimo in uporabimo generalizirano MNKV.

⁸⁹ Ang. *Maximum Likelihood Method*.

14.1 Metoda največjega verjetja v splošni obliki

Imamo časovno vrsto T opazovanj $\{y_t\}$, pri čemer t predstavlja čas in zavzame vrednosti od 1 do T . Iz vzorca T opazovanj lahko v vsakem časovnem trenutku sestavimo T »setov« opazovanj ($Y_t = (y_1, \dots, y_{t-p})$; $i=1, \dots, T$). Seti opazovanj so sestavljeni iz tistih opazovanj, ki v določenem časovnem trenutku t določajo regresijsko enačbo⁹⁰.

Nato predpostavimo, da je vzorec generirala neka funkcija verjetnostne porazdelitve f^{91} , in sicer tako, da je bilo vsako posamično opazovanje y_t generirano neodvisno od drugih opazovanj. Verjetnostna porazdelitev f vsebuje vektor parametrov θ . Vektor parametrov je sestavljen iz q regresijskih parametrov α , $\theta = \alpha_1, \dots, \alpha_q$. Vzorec opazovanj kompaktno opišemo z verjetnostno porazdelitvijo f kot:

$$f(y_t; \theta) \text{ oz. } f(y_1, \dots, y_T; \alpha_1, \dots, \alpha_q) \quad (81)$$

Ker je vzorec le del populacije, ima populacija enako verjetnostno porazdelitev⁹². Naš cilj je oceniti regresijske parametre α .

Regresijske parametre α ocenimo tako, da maksimiziramo »funkcijo verjetnosti«. Funkcija verjetnosti⁹³, L , je definirana kot katerakoli funkcija, ki je sorazmerna verjetnostni porazdelitvi (Fabozzi et al., 2007, str. 66):

$$L(\alpha_1, \dots, \alpha_q | y_1, \dots, y_T) \propto f(y_1, \dots, y_T | \alpha_1, \dots, \alpha_q) \quad (82)$$

Znak \propto predstavlja proporcionalnost. Ker je funkcija verjetnosti proporcionalna funkciji verjetnostne porazdelitve in obe funkciji določajo isti parametri, je vseeno, ali maksimiziramo funkcijo verjetja, L , ali verjetnostno porazdelitev, $f(\cdot)$, na rezultate to ne bo vplivalo. Zato predpostavimo, da je funkcija verjetja L enaka funkciji verjetnostne porazdelitve f .

V uvodu smo predpostavili, da je bilo vsako opazovanje y_t generirano neodvisno, z neodvisnimi in naključnimi »potegi« vrednosti iz populacije s funkcijo verjetnostne porazdelitve f (analogno: da proces generiranja podatkov generira zaporedne vrednosti vzorca med seboj neodvisno⁹⁴). V tem primeru je funkcija verjetja (L) enaka produktu verjetnostnih porazdelitev (f), izračunanih na različnih »setih« opazovanj, ki sestavljajo vzorec (Fabozzi et al., 2007, str. 66):

$$L(\alpha_1, \dots, \alpha_q | y_1, \dots, y_T) = \prod_{t=1}^T f(Y_t | \alpha_1, \dots, \alpha_q) \quad (83)$$

⁹⁰ Npr.: Modelu AR(2) v trenutku t sestavlja sledeči set opazovanj: y_t, y_{t-1} in y_{t-2} .

⁹¹ Spremenljivka, ki jo proučujemo, je zvezna. Verjetnostna porazdelitev je splošen izraz, ki se nanaša na porazdelitev diskretnih in zveznih spremenljivk. Verjetnostno porazdelitev zvezne spremenljivke imenujemo funkcija gostote verjetnosti ali gostota verjetnosti ali gostota. Verjetnost, da zvezna spremenljivka zavzame točno določeno vrednost, je po definiciji enaka nič. Verjetnost, da zvezna spremenljivka zavzame določeno vrednost v praksi, izračunamo na majhnem intervalu okoli te vrednosti.

⁹² Torej hkrati implicitno predpostavljamo, da naš vzorec dobro predstavlja populacijo.

⁹³ Ang. *Likelihood Function*.

⁹⁴ V praksi predpostavka omogoča množenje funkcij gostot verjetnosti setov opazovanj. Namreč verjetnost, da se dva neodvisna dogodka zgodita hkrati, je enaka produktu njunih mejnih verjetnosti.

Namreč, verjetnost, da se dva neodvisna dogodka zgodita hkrati, je enaka produktu njunih mejnih verjetnosti. Verjetnost vzorca $\{y_t\}$ maksimiziramo tako, da izberemo takšne vrednosti regresijskih koeficientov $(\alpha_1, \dots, \alpha_q)^*$, ki maksimizirajo funkcijo verjetja L (Fabozzi et al., 2007, str. 67):

$$(\alpha_1, \dots, \alpha_q) = \arg \max .(L(\alpha_1, \dots, \alpha_q)) \quad (84)$$

Logaritemska funkcija je monotona funkcija. Zato lahko funkcijo verjetja logaritmiziramo in to ne bo vplivalo na rezultat. Maksimum funkcije ostane pri enakih vrednostih regresijskih koeficientov (Fabozzi et al., 2007, str. 67):

$$(\alpha_1, \dots, \alpha_q) = \arg \max .(\log L(\alpha_1, \dots, \alpha_q)) \quad (85)$$

Logaritmiranje spremeni produkt v vsoto, kar je pripravneje za računanje (Fabozzi et al., 2007, str. 67):

$$\begin{aligned} \log L(\alpha_1, \dots, \alpha_q \mid y_1, \dots, y_T) &= \log \prod_{t=1}^T f(Y_t \mid \alpha_1, \dots, \alpha_q) = \\ &= \sum_{t=1}^T \log f(Y_t \mid \alpha_1, \dots, \alpha_q) = \\ &= \sum_{t=1}^T \log f(y_t, \dots, y_{t-p} \mid \alpha_1, \dots, \alpha_q) \end{aligned} \quad (86)$$

Gornja funkcija se imenuje »logaritmirana funkcija verjetnosti⁹⁵« (LL).

14.2 Primer funkcije verjetja

Konkretna oblika funkcije verjetnosti je odvisna od vrste (oblike) modela, ki ga ocenujemo in predpostavke, kako se porazdeljujejo slučajne napake. Za ponazoritev izračuna funkcije verjetja bomo uporabili avtoregresijski model prvega reda, AR(1). Predpostavili bomo, da se odkloni porazdeljujejo normalno:

$$\begin{aligned} y_t &= \alpha + \rho_1 y_{t-1} + e_t \\ E(y_t) &= \alpha + \rho_1 y_{t-1} \\ e_t &\sim N(0, \sigma^2) \end{aligned} \quad (87)$$

Funkcija verjetja je enaka produktu mejnih verjetnostnih porazdelitev opazovanih vrednosti:

$$L(\alpha_1, \dots, \alpha_q \mid y_1, \dots, y_T) = \prod_{t=1}^T f(Y_t \mid \alpha_1, \dots, \alpha_q) \quad (88)$$

⁹⁵ Ang. *Log Likelihood Function*.

Enačba (88) velja, kadar so »potegi« vzorčnih vrednosti y_t iz populacijske verjetnostne porazdelitve neodvisni. Kakor namiguje uporaba avtoregresijskega modela, pa so v praksi zaporedne vrednosti y_t med seboj odvisne. Zato njihove skupne porazdelitvene funkcije ne moremo zapisati kot produkta njihovih mejnih verjetnostnih porazdelitev. Uporabimo trik, ki skupno verjetnostno porazdelitev dveh odvisnih spremenljivk loči na dva dela (Fabozzi et al., 2007, str. 260):

$$f(y_2, y_1) = f(y_2 | y_1) f(y_1) \quad (89)$$

Enako lahko naredimo s skupno verjetnostno porazdelitvijo treh odvisnih spremenljivk:

$$f(y_3, y_2, y_1) = f(y_3 | y_2, y_1) f(y_2, y_1) \quad (90)$$

V kolikor enačbo (89) vstavimo v enačbo (90), dobimo:

$$f(y_3, y_2, y_1) = f(y_3 | y_2, y_1) f(y_2 | y_1) f(y_1) \quad (91)$$

Skupna verjetostna porazdelitev časovne vrste $\{y_t\}$ postane:

$$\begin{aligned} f(Y_T) &= f(y_T | Y_{T-1}) f(y_{T-1} | Y_{T-2}) \dots f(y_0) = \\ &= f(y_0) \prod_{t=1}^T f(y_t | Y_{t-1}) \end{aligned} \quad (92)$$

Kjer Y_T predstavlja celotno časovno vrsto, Y_{T-i} pa časovno vrsto do trenutka $T-i$. Funkcijo verjetja dobimo tako, da desno stran enačbe (83) nadomestimo z enačbo (92):

$$L(\alpha_1, \dots, \alpha_q | y_1, \dots, y_T) = f(y_0) \prod_{t=1}^T f(y_t | Y_{t-1}) \quad (93)$$

In logaritem funkcije verjetja:

$$\ln L(\alpha_1, \dots, \alpha_q | y_1, \dots, y_T) = \ln f(y_0) + \sum_{t=1}^T \ln f(y_t | Y_{t-1}) \quad (94)$$

Dotična oblika funkcije verjetja je odvisna od predpostavk modela. Za primer predpostavimo normalno porazdeljene slučajne napake:

$$\varepsilon_t \sim N(0, \sigma^2) \quad (95)$$

Potem je pogojna verjetostna porazdelitev spremenljivke y_t , pogojevana na vrednosti y_{t-1} , prav tako normalno porazdeljena:

$$\left. \begin{array}{l} E(y_t) = \alpha + \rho_1 y_{t-1} \\ \varepsilon_t \sim N(0, \sigma^2) \end{array} \right\} \quad y_t \sim N(E(y_t), \sigma^2) \quad (96)$$

Spremenljivka y_t je zvezna. Verjetnostno porazdelitev zvezne spremenljivke opišemo s funkcijo gostote verjetnosti⁹⁶. Funkcija gostote verjetnosti neodvisne, normalno porazdeljene slučajne spremenljivke X , ima sledečo obliko:

$$X \sim N(\mu, \sigma^2) \quad (97)$$

$$f(X) = \frac{1}{\sqrt{2\pi} \sigma} \exp\left[-\frac{1}{2\sigma^2}(X - \mu)^2\right] \quad (98)$$

Pričakovana vrednost slučajne spremenljivke X je enaka njeni aritmetični sredini, μ . Pričakovana vrednost spremenljivke y_t , ki ni neodvisna, pa je določena z obliko regresijskega modela. Iz izraza (96) je razvidno, da je njena vrednost pogojena z lastno preteklo vrednostjo. Pogojna verjetnostna porazdelitev oz. pogojna funkcija gostote verjetnosti spremenljivke y_t ima sledečo obliko:

$$y_t \sim N(E(y_t), \sigma^2) \quad (99)$$

$$f(y_t | Y_{t-1}) = \frac{1}{\sqrt{2\pi} \sigma} \exp\left[-\frac{1}{2\sigma^2}(y_t - \alpha - \rho_1 y_{t-1})^2\right] \quad (100)$$

Enačbo (100) vstavimo v enačbo (93) in funkcija verjetja postane:

$$\begin{aligned} L(\theta | y_1, \dots, y_T) &= f(y_0) \prod_{t=1}^T \frac{1}{\sqrt{2\pi} \sigma} \exp\left[-\frac{1}{2\sigma^2}(y_t - \alpha - \rho_1 y_{t-1})^2\right] = \\ &= f(y_0) (2\pi \sigma^2)^{-\frac{T}{2}} \prod_{t=1}^T \exp\left[-\frac{1}{2\sigma^2}(y_t - \alpha - \rho_1 y_{t-1})^2\right] \end{aligned} \quad (101)$$

Nato z logaritmiranjem produkte spremenimo v vsote in dobimo logaritem funkcije verjetja (LL):

$$\begin{aligned} \ln L(\theta | y_1, \dots, y_T) &= \ln f(y_0) - \frac{T}{2} \ln(2\pi) - \frac{T}{2} \ln \sigma^2 - \frac{1}{2\sigma^2} \sum_{t=1}^T [(y_t - \alpha - \rho_1 y_{t-1})^2] \\ &= \ln f(y_0) - \frac{T}{2} \ln(2\pi) - \frac{T}{2} \ln \sigma^2 - \frac{1}{2\sigma^2} \sum_{t=1}^T \varepsilon_t^2 \end{aligned} \quad (102)$$

Logaritem funkcije verjetnosti maksimiziramo glede na regresijske parametre θ , $\theta = [\alpha, \rho_1, \sigma^2]$.

⁹⁶ Ang. *Probability Density Function*.

Maksimum logaritma funkcije verjetja (LL) dobimo tako, da prve odvode funkcije izenačimo z nič in poiščemo vrednosti regresijskih parametrov, pri katerih je njena vrednost najvišja. Enačba LL se imenuje brezpogojna oz. popolna funkcija verjetja. Izraz brezpogojna se ne nanaša na odvisnost med zaporednimi vrednostmi y_t , temveč na dejstvo, da funkcija vključuje tudi verjetnostno porazdelitev neopazovane vrednosti⁹⁷ oziroma latentnega opazovanja (y_0) na začetku časovne vrste⁹⁸.

V praksi iz funkcije verjetja neopazovane vrednosti velikokrat izpustimo, saj imajo pri velikih vzorcih zanemarljiv vpliv na ocene regresijskih parametrov. V tem primeru pravimo, da funkcijo pogojujemo na prvih opazovanjih. Npr. pri AR(1) modelu jo pogojujemo na y_1 , v praksi to pomeni, da iz enačbe (102) izpustimo prvi člen. Pravimo, da ocenjujemo pogojno funkcijo verjetja⁹⁹.

14.3 Izračun parametrov

Vrednosti parametrov regresijskega modela izračunamo s pomočjo numerične maksimizacije logaritma verjetja. Prvi odvodi logaritma verjetja tvorijo zapleten sistem nelinearnih enačb. Sisteme nelinearnih enačb rešujemo s pomočjo iterativnih optimizacijskih metod. S postopnim iterativnim približevanjem skušamo najti t. i. »globalni maksimum funkcije verjetja«. Ker ima funkcija logaritma verjetja navadno več lokalnih maksimumov, je možno, da je dobljena rešitev θ^* napačna. Zato računalniški programi navadno uporabljajo več različnih vrst algoritmov. Nekateri najpogosteje uporabljeni algoritmi so: Berndt-Hall-Hall-Hausmann-ov¹⁰⁰ (BHHH), Broyden-Fletcher-Goldfarb-Shanno-ov (BFGS), Newton-Raphson. Navadno računalniški programi preklapljajo med algoritmi, dokler ne dosežejo globalnega maksimuma.

15. Bayes cenilka

V klasični ekonometriji frekvenco pojavljanja dogodka interpretiramo kot verjetnost dogodka. Npr. pri 1000-ih metih kovanca smo zabeležili 700 grbov in 300 cifer. Naš vzorec sestavlja 1000 metov kovanca, pri čemer je vzorec sestavljen iz 700 enot, ki jim pripisemo vrednost 1 (grb), in 300 enot, ki jim pripisemo vrednost 0 (cifra). Sedaj se vprašajmo, ali je kovanec pristranski? Smiselno je skleniti, da je kovanec pristranski s 70 % verjetnostjo grba. Do enakega sklepa bi prišli z ML cenilko. V ocenitvi regresijskega modela z ML cenilko bi uporabili binomialno porazdelitev in poiskali takšno vrednost parametra θ (ki predstavlja verjetnost grba), ki bi maksimizirala verjetnost našega vzorca. ML cenilka bi določila vrednost parametra $\theta^*=0,7$. Pri binomialni porazdelitvi z vrednostjo $\theta^*=0,7$ pričakujemo pri 1000-ih metih 700 grbov in 300 cifer. Pri ML cenilki predpostavimo, da je bil vzorec generiran iz neke teoretične porazdelitve (tokrat binomialna), ki ji pripada nek parameter (tokrat parameter $\theta_{pop.}$). Prava populacijska vrednost parametra $\theta_{pop.}$ je nepoznana. Nato ML cenilka manipulira vrednost parametra θ tako, da bi naša predpostavljena teoretična porazdelitev (binomialna s parametrom $\theta_{pop.}$) kar najverjetnejše »izvrgla« vzorec, kot je naš. ML cenilka maksimizira verjetnost vzorca oz. podatkov:

⁹⁷ Yo vključimo v funkcijo verjetja, kadar imamo malo opazovanj in želimo izkoristiti tudi opazovanja na začetku časovne vrste. V primeru modela AR(1) želimo, da opazovanje y_1 prispeva k oceni parametrov: $E(y_1)=\alpha+\beta y_0$.

⁹⁸ Ang. *Unobservables, Latent Preseries*.

⁹⁹ Ang. *Conditional Likelihood*.

¹⁰⁰ Za dober opis BHHH algoritma glej diplomsko delo Tine Mehle (2005, str. 39).

$$ML : \max p(y|\theta^*) \quad (103)$$

Ker klasična statistika frekvenco pojavljanja dogodka (700/1000) interpretira kot verjetnost, pravimo, da se klasična statistika poslužuje ferkventnognega pristopa¹⁰¹. Bayesovska cenilka ferkventnostni pristop ponese korak dlje. Namreč, kot bomo videli v nadaljevanju, s pomočjo verjetnostne funkcije lastnih subjektivnih prepričanj in Bayesovega teorema, lahko maksimiziramo verjetnost parametra θ^* ob danem vzorcu (Fabozzi et al., 2007, str. 65):

$$Bayesian : \max p(\theta^*|y) \quad (104)$$

15.1 Bayesov teorem

Bayesovska ekonometrija temelji na preprostih intuitivnih verjetnostnih pravilih, ki jih je moč aplicirati na katerokoli področje statistike. Da bi razumeli, kako deluje Bayesovska cenilka, moramo spoznati preprosto pravilo za računanje z verjetnostmi, imenovano Bayesov teorem.

Naj A in B predstavljata naključni spremenljivki. Kadar sta A in B neodvisni spremenljivki, velja, da je verjetnost, da se A in B zgodita hkrati, enaka produktu njunih mejnih verjetnosti (Koop, str. 1, 2003):

$$p(A,B) = p(A) * p(B) \quad (105)$$

Vendar pa v ekonometriji ponavadi obravnavamo odvisne spremenljivke. Verjetnost, da se dve odvisni spremenljivki A in B zgodita hkrati ($p(A,B)$), je enaka (Koop, str. 1, 2003):

$$p(A,B) = p(A | B) * p(B) \quad (106)$$

Kar je enako produktu pogojne verjetnosti dogodka A¹⁰² ($p(A|B)$; verjetnosti, da se zgodi dogodek A, ob pogoju, da se je zgodil dogodek B) in mejne verjetnosti dogodka B¹⁰³ ($p(B)$; verjetnost, da se zgodi dogodek B, neodvisno od dogodka A). Velja seveda tudi obratno:

$$p(B,A) = p(B | A) * p(A) \quad (107)$$

Bayesov teorem dobimo tako, da iz enačbe (107) izrazimo pogojno verjetnost dogodka B ($p(B|A)$):

$$p(B | A) = \frac{p(B,A)}{p(A)} \quad (108)$$

Nato skupno verjetnost dogodka A in B ($P(B,A)$) v enačbi (108) nadomestimo z enačbo (107). Dobljeni teorem imenujemo Bayesovo pravilo¹⁰⁴ (Koop, str. 1, 2003):

¹⁰¹ Ang. *Frequentist Approach*.

¹⁰² Ang. *Conditional Probability*.

¹⁰³ Ang. *Marginal Probability*.

¹⁰⁴ Ang. *Bayes Rule*.

$$p(B | A) = \frac{p(A | B) * p(B)}{p(A)} \quad (109)$$

Bayesovo pravilo pravi, da je pogojna verjetnost dogodka B enaka produktu pogojne verjetnosti dogodka A ($p(A | B)$) in mejne verjetnosti dogodka B ($p(B)$), deljene z mejno verjetnostjo dogodka A ($P(A)$). Celotna Bayesovska ekonometrija (verjetnosti parametrov, modelov, sklepanje o hipotezah, etc.) temelji na manipuliraju z Bayesovim teoremom.

Ekonometriki raziskujejo pojave ter jih skušajo razložiti in napovedati na podlagi podatkov in ustreznega modela. Center interesa ekonometrika je soočenje podatkov ter regresijskih parametrov ustreznega modela. Ekonometrik bi zato preuredil Bayesovo pravilo tako, da bi namesto dogodkov A in B v logično enačbo umestil podatke (y) ter parametre modela (θ):

$$p(\theta | y) = \frac{p(y | \theta) * p(\theta)}{p(y)} \quad (110)$$

Prirejeno Bayesovo pravilo interpretiramo kot verjetnost regresijskih parametrov pri danih podatkih. V nasprotju s klasičnim pristopom, ki predpostavlja, da obstaja prava populacijska vrednost parametrov ($\theta_{pop.}$; v uvodu smo npr. ocenili, da je prava populacijska vrednost θ , v binomialni porazdelitvi enaka 0,7), Bayesovska ekonometrija obravnava tudi regresijske parametre (θ) kot naključne spremenljivke. Namreč, v kolikor obstaja neka prava populacijska vrednost parametrov θ , ne moremo ocenjevati njihove verjetnosti. Verjetnost, da je populacijska prava vrednost parametra θ enaka neki konstanti c ($\theta=c$), je lahko zgolj 0 % ali pa 100 %. Ravno zato frekventnostne interpretacije intervalov zaupanja ne interpretiramo kot verjetnost parametra (glej poglavje Nekatere razlike med Bayesovsko in ML cenilko). Pri frekventnostenem pristopu obravnavamo parametre kot fiksne, Bayesovski pristop pa predpostavlja, da so tudi parametri slučajne spremenljivke.

Ker je mejna verjetnost podatkov $p(y)$ neodvisna od regresijskih parametrov θ , lahko izraz v enačbi (110) poenostavimo (Koop, str. 2, 2003):

$$p(\theta | y) \propto p(y | \theta) * p(\theta) \quad (111)$$

Kjer znak \propto predstavlja proporcionalnost. Enačba (111) je srce Bayesovske ekonometrije. $p(\theta | y)$ je pogojna verjetnost parametrov in jo v Bayesovski ekonometriji imenujemo posteriorna verjetnost¹⁰⁵. $p(y|\theta)$ je pogojna verjetnost podatkov in jo imenujemo verjetje¹⁰⁶. $p(\theta)$ je mejna verjetnost parametrov, ki jo v Bayesovski ekonometriji imenujemo priorna verjetnost¹⁰⁷. Poenostavljen Bayesov teorem trdi, da je posteriorna verjetnost regresijskih parametrov ($p(\theta|y)$) sorazmerna produktu (pogojne) verjetnosti podatkov ($p(y | \theta)$) in priorne verjetnosti parametrov ($p(\theta)$). V Bayesovskem žargonu enačbo opišemo kot: »Posterior equals prior times likelihood«.

Z Bayesovsko cenilko na matematično-formalen način združimo naše dotedanje znanje o pojavu, z novimi podatki, ki so na voljo. Mnogi gledajo na Bayesovski pristop tudi kot na metodo, s pomočjo katere posodabljammo znanje o pojavu. Priorna porazdelitev parametrov

¹⁰⁵ Ang. *Posterior Probability* oz. *Posterior*.

¹⁰⁶ Ang. *Likelihood*.

¹⁰⁷ Ang. *Prior Probability* oz. *Prior*.

namreč predstavlja naše obstoječe znanje o pojavu, medtem ko ima funkcija verjetja nalogo, da posodobi obstoječe znanje o pojavu. Skozi funkcijo verjetja v posteriorno porazdelitev vstopajo novi podatki, ki so na voljo. Smiselno je, da si ogledamo, kaj vsak posamezni člen pirejenega Bayesovega teorema pomeni za praktika.

15.2 Funkcija verjetja oz. »Likelihood«

Funkcija verjetja, ki vstopa v Bayes cenilko, je lahko katerakoli funkcija, ki je proporcionalna funkciji (pogojni) verjetnosti podatkov. V praksi zato najpogosteje v obliki funkcije verjetja nastopata MNKV in ML cenilka. Ta del Bayesovske cenilke torej ne predstavlja nič novega. V pričujočem diplomskem delu funkcijo verjetja predstavlja ML cenilka, ki je podrobneje opisana v predhodnem poglavju:

$$p(y | \theta) = \log L \quad (112)$$

Funkcija verjetja je tisti del Bayes cenilke, ki omogoča vnos novih podatkov v ocene parametrov. Količina podatkov oz. moč podatkov vpliva na posteriorne ocene porazdelitev parametrov. Več podatkov kot imamo, močnejši je njihov vpliv na posteriorno porazdelitev parametrov.

15.3 Priorna porazdelitev oz. »Prior«

Nekoliko sporen del Bayesovske ekonometrije je ravno priorna porazdelitev parametrov. Namreč, ta omogoča vnos subjektivnih informacij ali prepričanj v analizo. Priorna porazdelitev parametrov naj bi obsegala vse tisto, kar vemo o pojavu, preden vidimo podatke. Tisto, kar vemo o pojavu, je lahko tudi subjektivne narave. Klasična ekonometrija zavrača subjektiven pristop k ocenjevanju modelov. Lahko bi rekli, da klasična ekonometrija preferira podatke. Še več, priorna porazdelitev je tudi jedro spora znotraj Bayesovske struje ekonometrije. Le-ta se deli na ekonometrike, ki kot priorne informacije uporabljajo samo predhodne študije in predhodno znanje o pojavu, ter na tiste, ki pri formirjanju priorne porazdelitve uporabijo kar ocene parametrov, ocenjene s pomočjo druge cenilke. Tudi če kot predhodno znanje o pojavu uporabljam samo prejšnje študije o pojavu, ne moremo vedeti, ali so le-te objektivne ali pa so bile podvržene subjektivnemu vplivu raziskovalca. Kot bomo videli v nadaljevanju, se je moč subjektivnosti deloma izogniti z uporabo t. i. neinformativnih priornih porazdelitev.

Priorne informacije lahko v cenilko vstopajo v katerikoli obliki, vendar pa jih za potrebe ocenjevanja izrazimo v obliki verjetnostnih izjav. Najpogosteje parametrom, ki so podvrženi ocenjevanju, pripisemo neko verjetnostno porazdelitev. Npr. v primeru zvezne spremenljivke bi tako nekemu namišljenemu parametru α pripisali, da se porazdeljuje normalno z neko aritmetično sredino in varianco:

$$\alpha \sim N(\mu, \sigma) \quad (113)$$

Nekatere priorne porazdelitve so bolj prikladne za obravnavo pojava in nekatere manj. V nadaljevanju si bomo ogledali najpogostejše pojme in njihov pomen za posteriorno analizo, ki se v Bayesovski ekonometriji pojavljajo v povezavi s priorno porazdelitvijo.

15.3.1 Naravna konjugirana porazdelitev

S priorno porazdelitvijo opredelimo verjetnostno porazdelitev parametrov, ki jih ocenujemo. Ponavadi je to funkcija gostote verjetnosti poznane oblike. In ker je posteriorna porazdelitev produkt funkcije verjetja in priorne porazdelitve, je smiseln slednjo formirati na takšen način, da ima posteriorna porazdelitev parametra enako gostoto verjetnosti kot priorna porazdelitev parametra. Takšno priorno porazdelitev imenujemo naravno konjugirana porazdelitev¹⁰⁸. Tipična predstavnica naravne konjugirane porazdelitve je dvojček normalne porazdelitve za regresijske koeficiente in gamma porazdelitve za varianco. Funkcija, ki predstavlja posteriorno porazdelitev, je nato prav tako normalna in gamma porazdelitev, kar nam omogoča, da lahko ocene parametrov izračunamo tudi analitično, na listu papirja. Naravne konjugirane porazdelitve so bile za praktično izvajanje Bayesovske analize pomembne predvsem v preteklosti, ko ni bilo na voljo računalnikov, s pomočjo katerih lahko namesto izračuna posteriorne porazdelitve, le-to kar simuliramo. Dandanes pa lahko med seboj kombiniramo praktično katerekoli porazdelitve, celo takšne, ki jih »izumimo« kar sami. Še več, zaželeno je, da poizkusimo z več različnimi porazdelitvami in nato primerjamo rezultate posteriornih porazdelitev. Kadar je problem dobro opredeljen, so rezultati podobni, pravimo, da so robustni.

15.3.2 Informativna priorna porazdelitev

Informativna priorna porazdelitev je tista porazdelitev, ki relativno močno vpliva na posteriorno oceno parametrov. Pravimo tudi, da v cenilko vnese veliko priornih informacij. Informativno priorno porazdelitev uporabimo, kadar dobro poznamo pojav in smo o vrednostih, ki naj bi jih zavzele posteriorne ocene parametrov, dobro podučeni. V praksi moč naših prepričanj izrazimo s pomočjo razpršenosti spremenljivke okoli njene srednje vrednosti (Congdon, 2003, str. 10). Tako npr. normalno porazdeljenemu regresijskemu parametru pripišemo nizko varianco:

$$\alpha \sim N(0.5, 1) \quad (114)$$

Implicitno pravimo, da je posteriorna porazdelitev blizu priorne porazdelitve. Prepričani smo, da vemo, kakšno vrednost naj bi zavzel regresijski parameter. Informativna priorna porazdelitev predstavlja močan vnos subjektivnih informacij v posteriorno porazdelitev. Kadar o pojavi dejansko vemo veliko, informativna priorna porazdelitev ni problematična. Kadar pa se motimo, je možno, da posteriorne ocene parametrov odražajo zgolj naše zmotno prepričanje. Zato ponavadi poleg informativne priorne porazdelitve uporabimo tudi t. i. »neinformativno priorno porazdelitev¹⁰⁹« in tako preverimo, kako močno naše prepričanje vpliva na ocene parametrov.

15.3.3 Neinformativna priorna porazdelitev

Poznamo več vrst neinformativnih priornih porazdelitev, njihova skupna značilnost pa je, da v posteriorne ocene parametrov ne vnašajo veliko informacij. Kadar uporabimo neinformativno priorno porazdelitev, bodo posteriorne ocene parametrov zelo blizu ocenam parametrov, ki bi jih dobili s klasičnim pristopom. Pravimo tudi, da dovolimo podatkom, da prevladajo pri posteriorni oceni parametrov. Tipičen primer neinformativne priorne porazdelitve bi bila

¹⁰⁸ Ang. *Natural Conjugate Prior*.

¹⁰⁹ Ang. *Non Informative prior*.

predpostavka, da se regresijski parameter porazdeljuje normalno, z aritmetično sredino enako nič in zelo veliko varianco:

$$\alpha \sim N(0, 1000) \quad (115)$$

Zgornja priorna porazdelitev je za praktične namene popolnoma neinformativnega značaja. Teoretično bi morala biti varianca neskončna, vendar pa bi to onemogočilo izračun posteriornih ocen parametrov.

Da preverimo skladnost našega modela s podatki, ponavadi preizkusimo več neinformativnih priornih porazdelitev in primerjamo dobljene ocene. V kolikor model dobro opisuje pojav, ki ga proučujemo, bodo rezultati skoraj enaki.

15.4 Odnos med posteriorno, priorno porazdelitevijo in funkcijo verjetja

Posteriorna porazdelitev je produkt priorne porazdelitve ter funkcije verjetja, zato so tudi njene značilnosti močno odvisne od determinant omenjenih verjetnostnih porazdelitev. Najlažje ponazorimo vpliv priorne porazdelitve in funkcije verjetja na posteriorno porazdelitev, če si ogledamo konkreten primer posteriorne pogojne verjetnostne porazdelitve parametrov. Primer je povzet po Bagasheva, Fabozzi, Hsu in Rachev (2008, str. 35-37).

Predpostavimo, da model sestavlja enostavna linearja enačba sredine, katere ostanki se porazdeljujejo normalno. Za sredino uporabimo konjugirano priorno porazdelitev, kar pomeni, da bo posteriorna porazdelitev parametrov enake funkcijске oblike kot priorna. Zaradi enostavnosti predpostavimo, da poznamo pravo vrednost variance σ^2 in tako ni potrebe po specifikaciji njene priorne porazdelitve. Ocenujemo zgolj enačbo sredine μ in njej pripadajočo varianco τ^2 . Ob navedenih poenostavitvah je posteriorna sredina in njej pripadajoča varianca enaka:

$$p(\mu) \sim N(\eta, \tau^2) \quad (116)$$

$$\mu^* = \hat{\mu} \frac{\frac{n}{\sigma^2}}{\frac{n}{\sigma^2} + \frac{1}{\tau^2}} + \mu \frac{\frac{1}{\tau^2}}{\frac{n}{\sigma^2} + \frac{1}{\tau^2}} \quad \text{in} \quad \tau^{2*} = \frac{1}{\frac{n}{\sigma^2} + \frac{1}{\tau^2}} \quad (117)$$

$$p^*(\mu) \sim N(\mu^*, \tau^{2*}) \quad (118)$$

Priorna porazdelitev sredine ($p(\mu)$) je normalna z aritmetično sredino η in varianco τ^2 . μ^* predstavlja posteriorno (pogojno) porazdelitev sredine, po tem, ko smo soočili podatke in priorno porazdelitev. τ^{2*} je posteriorna (pogojna) varianca sredine. Razvidno je, da je posteriorna sredina (μ^*) dejansko tehtano povprečje sredine ocenjene s pomočjo metode največjega verjetja ($\hat{\mu}$) in priorne sredine (μ). Kot uteži v enačbi nastopajo velikost vzorca (n), natančnost podatkov (σ^2) in varianca priorne porazdelitve sredine (τ^2). Ker sta imenovalca, ki nastopata v enačbi posteriorne sredine, enaka, je pomembno predvsem, kakšna je vrednost v števcu ulomkov. Iz enačb (117) je razvidno, da je tehtano povprečje obeh sredin (priorne ter sredine izračunane s pomočjo funkcije verjetja) bližje sredini, dobljeno s pomočjo

ML metode, kadar je velikost vzorca (n) velika in varianca podatkov (σ^2) majhna. Obratno velja, kadar menimo, da vemo o pojavu veliko, kar je analogno, kot da pripisemo sredini zelo majhno varianco τ^2 . Takrat bo v poseriorni oceni sredine dominirala priorna porazdelitev. V skrajnih točkah, kadar je velikost vzorca neskončna ali pa priorna varianca sredine enaka nič, bo v limiti poseriorna porazdelitev v prvem primeru enaka ML oceni, in v drugem priorni porazdelitvi.

Poseriorna porazdelitev je v primeru normalno porazdeljene sredine in normalne priorne porazdelitve, tehtano povprečje velikosti vzorca in samozavesti priorne porazdelitve. Analogen rezultat bi dobili tudi v drugih primerih (npr. kadar bi uporabili druge priorne porazdelitve parametrov ali drugačno obliko funkcije verjetja), le računanje in obrazca za poseriorno porazdelitev sredine bi bili veliko bolj zapleteni¹¹⁰.

15.5 Ocenjevanje z Bayes cenilko

Sklepanje o hipotezah in parametrih, ki se ga poslužujejo Bayesovski statistiki, je intuitivnejše kot pri klasičnem pristopu. Kljub temu da so Bayesovske metode lažje razumljive, bolj intuitivne, pa do nedavnega niso bile široko uporabljane. Ker so metode, s katerimi ocenjujemo parametre, lahko tako zelo računsko zapletene, si brez uporabe sodobne računalniške tehnologije, praktične aplikacije Bayesovskega sklepanja sploh ni moč predstavljati. Ekonometriki do nedavnega Bayesovskim metodam niso posvečali toliko pozornosti kot običajnim »frequentist« metodam. Izračuni poseriornih porazdelitev parametrov vsebujejo veliko integriranja in dobljene rešitve so zapletene ter dolge enačbe, ki jih ni mogoče poenostaviti. Z uporabo sodobne računalniške tehnologije se je problemu moč izogniti.

Namesto analitičnega reševanja zapletenih integralov dandanes uporabljamo računalnike in posebne metode vzorčenja, s katerimi simuliramo in nato ocenimo poseriorno porazdelitev parametrov. Ko smo opredelili tako funkcijo verjetja kot priorne porazdelitve parametrov, pustimo računalniku, da »sestavi« poseriorno gostoto. Takšna poseriorna gostota je navadno zelo zapletene in nepoznane oblike. Iz nje ni moč na preprost način izraziti ocen regresijskih parametrov. Problemu se izognemo tako, da s posebnimi metodami vzorčenja skonstruiramo t. i. »Markovo verigo«, ki generira simulirane vrednosti parametrov in nato vrednosti parametrov ocenimo na dobljenem simuliranem vzorcu.

15.5.1 Markova veriga

Naj vektor parametrov, ki jih je v modelu potrebno oceniti predstavlja θ . Iz poseriorne gostote »vzorčimo« naključne vrednosti parametrov θ , in sicer na takšen način, da je v vsakem trenutku vrednost vektorja parametrov θ_t odvisna zgolj od predhodnega vektorja parametrov θ_{t-1} . Takšno zaporedje imenujemo »Markova verga¹¹¹« (prirejeno po Walsh, 2004, str. 3):

$$p(\theta_t | \theta_{t-1}, \dots, \theta_1) = p(\theta_t | \theta_{t-1}) \quad (119)$$

¹¹⁰ V nekaterih primerih tudi nerešljivi.

¹¹¹ Ang. *Markov Chain*.

Pomembno je, da so zaporedne simulirane vrednosti resnično odvisne samo od predhodne vrednosti, med zaporednimi vrednostmi parametrov obstaja zgolj avtokorelacija prvega reda. S tem zagotovimo, da vzorčni algoritem razišče vse možne predele posteriorne porazdelitve.

15.5.2 Gibbs-ov vzorčnik

Gibbs-ov vzorčnik je najpogosteje uporabljen algoritem, s katerim v Bayesovski ekonometriji simuliramo zaporedne vrednosti v Markovi verigi (vzorec parametrov). Kadar posteriorna porazdelitev vsebuje veliko parametrov, je simultano vzorčenje vseh parametrov hkrati izredno računsko intenzivno. Gibbsov vzorčnik se zato poslužuje pogojnega vzorčenja. Bistvo je v tem, da težko nalogo simultanega vzorčenja vseh parametrov hkrati razdeli na delčke, pri čemer delček predstavlja vzorčenje vrednosti enega parametra ob fiksnih vrednostih drugih parametrov.

Gibbs-ov vzorčnik »zaženemo« z začetnimi vrednostmi, ki so izbrane arbitralno. Začetne vrednosti imenujemo »*Initials*«. Začetne vrednosti nastopajo tudi pri ML metodi, le da jih tam ponavadi formira računalniški program. Verigo torej zaženemo s pomočjo nekih arbitarnih začetnih vrednosti (Congdon, 2006, str.12):

$$\theta^{(0)} = (\theta_{(1)}^{(0)}, \theta_{(3)}^{(0)}, \dots, \theta_{(k-1)}^{(0)}, \theta_{(k)}^{(0)}) \quad (120)$$

Gibbs-ov vzorčnik nato nadaljuje z zaporednim vzorčenjem novih vrednosti parametrov, pri čemer je vsakokratna nova predlagana vrednost parametra vzorčena z generatorjem naključnih števil iz posteriorne porazdelitve izračunane na podlagi fiksiranih vrednosti vseh ostalih parametrov (Congdon, 2006, str.12):

$$\begin{aligned} \theta_1^{(1)} &\sim p(\theta_1 | \theta_{(2)}^{(0)}, \dots, \theta_{(k)}^{(0)}) \\ \theta_2^{(1)} &\sim p(\theta_2 | \theta_{(1)}^{(0)}, \theta_{(3)}^{(0)}, \dots, \theta_{(k)}^{(0)}) \\ &\vdots \\ \theta_i^{(1)} &\sim p(\theta_i | \theta_{(1)}^{(0)}, \theta_{(2)}^{(0)}, \dots, \theta_{(i-1)}^{(0)}, \theta_{(i+1)}^{(0)}, \dots, \theta_{(k)}^{(0)}) \\ &\vdots \\ \theta_k^{(1)} &\sim p(\theta_k | \theta_{(1)}^{(0)}, \theta_{(2)}^{(0)}, \dots, \theta_{(k-1)}^{(0)}) \end{aligned} \quad (121)$$

Pri čemer številka, nadpisana v oklepaju (1), označuje krog¹¹², znotraj katerega vzorčimo vrednosti parametrov, ter posamezen parameter, katerega vzorčimo v danem trenutku. Po prvem krogu imamo za vsak parameter zgolj eno simulirano vzorčno vrednost, kar ni dovolj, da bi ocenili posteriorno porazdelitev parametra. Potrebujemo večji vzorec simuliranih vrednosti parametrov, zato krog ponovimo n-krat.

V praksi vzorčniki ponavadi ne vzorčijo vrednosti vsakega prametra posebej, temveč npr. po dva ali tri skupaj, v blokih. V takšnem primeru govorimo o vzorčenju po blokih parametrov¹¹³. Obenem smo v zgornjem opisu Gibbs-ovega vzorčenja izpustili še korak, ki

¹¹² Ang. *Iteration*.

¹¹³ Ang. *Block Sampling* ali *Component Wise Sampling*.

zagotovi, da simulirane vzorčne vrednosti predstavljajo Markovo verigo. Na koncu vsakega kroga končamo s simuliranimi vrednostmi parametrov θ^* , imenujemo jih »proposals« in iz njih izvedene predlagane funkcije verjetnostnih porazdelitev, ki so odvisne zgolj od prejšnjih vrednosti parametrov $p(\theta^{(t)} | \theta^{(t-1)})$. Nato algoritem izračuna stopnjo sprejetja¹¹⁴ (Bagasheva et al., 2008, str. 68):

$$a(\theta^*, \theta^{(t-1)}) = \min \left\{ 1, \frac{p(\theta^*) / g(\theta^* | \theta^{t-1})}{p(\theta^{t-1}) / g(\theta^{t-1} | \theta^*)} \right\} \quad (122)$$

Stopnja sprejetja s pomočjo posteriornih (p) in pogojnih verjetnosti (g) »meri« razkorak med predlaganimi vrednostmi parametrov θ^* in preteklimi vrednostmi parametrov $\theta^{(t-1)}$. Gornji opis je splošne oblike. Algoritmi se delijo glede na specifično funkcionalno obliko, ki tvori stopnjo sprejetja. Stopnja sprejetja mora biti ravno prav velika, saj ne želimo, da so predlagane vrednosti parametrov preveč skupaj, kar bi rezultiralo v avtokorelacijski, in obenem preveč narazen, saj konvergenca algoritma ne bi bila mogoča. Slednje pomeni, da se Markova veriga ne bi ustalila okoli neke srednje vrednosti in torej ne bi bilo mogoče oceniti posteriorne porazdelitve. V praksi se stopnjo sprejetja primerja z neko naključno porazdeljeno spremenljivko in v kolikor stopnja sprejetja presega naključno porazdeljeno spremenljivko, sprejememo nove predlagane vrednosti parametrov θ^* . Kadar pa predlagane vrednosti parametrov zavrnemo, se vrnemo na začetek kroga in poskusimo z novimi simuliranimi vzorčnimi vrednostmi.

15.5.3 Ocenjevanje posteriorne verjetnosti

Na podlagi simuliranih vzorcev (Markovih verig), dobljenih s pomočjo dotedne metode vzorčenja, nato zlahka ocenimo posteriorne verjetnosti parametrov:

$$\theta_i^* = \frac{1}{n-m} \sum_{m+1}^n \theta_i^{(n-m)} \quad (123)$$

V praksi določeno število prvih zaporednih vrednosti m v Markovi verigi izpustimo. S tem želimo izločiti vpliv arbitarnih začetnih vrednosti na posteriorne ocene in zagotoviti, da temeljijo na tistem delu Markove verige, ki je konvergirala. Prve vrednosti v Bayesovski ekonometriji imenujemo obdobje izgorevanja¹¹⁵. S konvergenco imamo v mislih značilnost, da se Markova veriga »ustali« oz. niha okoli neke najverjetnejše ocene parametra. Enostavno je konvergenco moč preveriti tako, da za vsak parameter »zaženemo« dve Markovi verigi hkrati in opazujemo, ali se verigi prepletata okoli srednje vrednosti ali pa se naključno gibljeta po prostoru možnih vrednosti parametra. Obstajajo tudi bolj formalni postopki, s katerimi preverjamo konvergenco verige.

16. Nekatere razlike med Bayes in ML cenilko

Bayesovska cenilka se od ML cenilke v majhnih vzorcih obnese bolje. Moč Bayesovske cenilke v majhnih vzorcih izvira iz dodatnih informacij, ki jih v model vnesemo v obliki

¹¹⁴ Ang. Acceptance Probability.

¹¹⁵ Ang. Burn-in Period.

predhodnih (priornih) prepričanj in jih nato posodobimo z novimi podatki, ki so na voljo. Dobro informirano¹¹⁶ priorno porazdelitev lahko enačimo z uporabnostjo velikega vzorca (Congdon, 2006, str. 1).

Pri Bayesovski cenilki z metodami vzorčenja generiramo celotno funkcijo gostote verjetnosti parametra tako, da je odklon od normalnosti takoj opažen.

Velikokrat so Bayesovske metode tudi natančnejše od klasičnih, saj omogočajo, da poleg podatkov v ocenjevanju nastopajo tudi naša predhodna prepričanja o parametrih. Vendar pa je potrebna velika mera izkušenj, saj lahko napačna priorna prepričanja vodijo do napačnih rezultatov. Prednost Bayes cenilke lahko kaj hitro postane njena slabost.

V klasični ekonometriji predpostavljamo, da so prave populacijske vrednosti parametrov konstantne. Posteriorna gostota Bayes cenilke pa je sestavljena tudi iz porazdelitvene funkcije parametrov, saj predpostavljamo, da so tudi regresijski parametri slučajne spremenljivke. Omenjena značilnost korenito spremeni tolmačenje intervalov zaupanja in hipotez. Klasična ekonometrija predpostavlja, da obstaja zgolj ena prava populacijska vrednost parametra. Kadar na podlagi vzorčnih podatkov pri stopnji zaupanja α sklenemo, da se le-ta nahaja na nekem intervalu $[a, b]$, ne moremo reči, da obstaja $1-\alpha$ odstotna verjetnost, da je prava populacijska vrednost parametra znotraj intervala. Ker smo dejansko maksimizirali verjetnost podatkov, lahko trdimo zgolj, da $1-\alpha$ odstotkov vseh vzorcev (ki bi jih lahko imeli) na intervalu $[a, b]$, vsebuje pravo populacijsko vrednost parametra. Na podlagi α odstotka vzorcev pa izračunan interval zaupanja ne vsebuje prave populacijske vrednosti regresijskega parametra. Klasična ekonometrija je pri tolmačenju intervalov zaupanja, hipotez in napovedi manj intuitivna od Bayesovske ekonometrije. Pri Bayesovski ekonometriji predpostavimo, da je regresijski parameter slučajna spremenljivka in ne konstanta. Intervale zaupanja zato tolmacimo intuitivno: »Trdimo, da se vrednost regresijskega parametra s 95% -odstotno verjetnostjo nahaja na intervalu $[a, b]$ «.

Ker so v Bayesovski ekonometriji tudi parametri slučajne spremenljivke, ne moremo trditi, da za modeliranje pojava obstaja zgolj en pravi model. V Bayesovski ekonometriji so vsi modeli pravilni, vendar pa različno verjetni. Tudi model, ki se komaj kaj prilega podatkom, je pravilen. Vendar pa je njegova verjetnost zanemarljiva. Pravilno formirane napovedi bi v Bayesovski ekonometriji temeljile na podlagi izčrpnega seta modelov¹¹⁷. Napoved vsakega modela bi tehtali z verjetnostjo modela in tako dobili tehtano povprečje napovedi.

17. Ocenjevanje napovedne moči modelov

Modeli nestanovitnosti so v prvi vrsti uporabljeni za napovedovanje tveganosti finančnih instrumentov. Zato je seveda ključno preveriti tudi njihovo napovedno moč. Modeli z nizko napovedno močjo imajo nizko praktično vrednost in jih je smiselno opustiti, kljub temu da morda predstavljajo eleganten, preprost model pretekle volatilnosti.

Preverjanje napovedne moči navadno poteka v treh korakih:

1. Raziskovalec oceni model na podlagi vzorca opazovanj od 1 do T.
2. Izračuna napovedi na podlagi opazovanj T+1 do T+H.
3. Izračuna agregatno mero odklonov dejanskih vrednosti od napovedanih vrednosti.

¹¹⁶ V smislu, da vsebuje strokovne argumente in je informativne narave.

¹¹⁷ To imenujemo Bayesovsko povprečenje (ang. *Bayesian Averaging*).

Napovedi so najpogosteje izračunane za eno obdobje naprej na podlagi dejanskih vrednosti¹¹⁸, redkeje pa se uporablja napovedi za več obdobjij naprej, generirane na podlagi napovedanih vrednosti¹¹⁹. Napovedi, generirane na podlagi dejanskih podatkov za eno obdobje naprej, so seveda natančnejše kot napovedi za več obdobjij, generirane na podlagi ocenjenih vrednosti.

Moč napovedi preverjamo s funkcijami izgube¹²⁰ oz. agregatnimi merami napak napovedi. Le-te se delijo na mere, ki enako obravnavajo tako pozitivne kot negativne napake ter na mera, ki diskriminirajo med različno predznačenimi odkloni.

17.1 Simetrične mere napak

Najpogosteje uporabljene simetrične mere napovedne moči modelov so sledeče (Fabozzi, 2007, str. 309):

$$RMSE = \sqrt{\frac{1}{n} \sum_{i=1}^n (e_{t+i}^2 - h_{f,t+i})^2} \quad (124)$$

$$MAE = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n |e_{t+i}^2 - h_{f,t+i}| \quad (125)$$

$$MAPE = \frac{100}{n} \sum_{i=1}^n \left| \frac{e_{t+i}^2 - h_{f,t+i}}{h_{f,t+i}} \right| \quad (126)$$

Povprečna kvadrirana napaka (RMSE¹²¹), povprečna absolutna napaka (MAE¹²²) in povprečna absolutna napaka izražena v odstotkih (MAPE¹²³). Mere se razlikujejo v tem, kako obravnavajo jakost odklonov. Vsaka vrednost odklona v RMSE je kvadrirana, kar pomeni, da mera pripisuje relativno večjo moč velikim odklonom ter relativno manjšo moč majhnim odklonom. Z drugimi besedami, lahko bi rekli, da precenjuje velike odklone ter podcenjuje majhne odklone. MAE uporablja absolutne vrednosti odklonov in pripisuje enako težo tako velikim kot majhnim odklonom, je linearna mera odklonskosti. Vendar se v stohastičnem svetu, kjer ni nič determinirano, želimo izogniti predvsem velikim presenečenjem, torej je smiselnih velikih odklonov nekoliko preceniti. MAPE pa izraža povprečen absolutni odstotni odklon in je neodvisen od mera spremenljivke.

Žal je pogojna varianca neopazovan, latentni, proces. Torej naše napovedi pogojne variance ne moremo neposredno primerjati z dejanskimi pogojnimi variancami. Največ, kar lahko storimo, je, da napovedi primerjamo z neko mero, za katero vemo, da posnema gibanje prave pogojne variance. ARCH modeli temeljijo na dejstvu, da je pogojno varianco moč modelirati

¹¹⁸ Ang. *One Step Ahead Forecast*.

¹¹⁹ Ang. *Multi Step Ahead Forecast*.

¹²⁰ Ang. *Loss Functions*.

¹²¹ Ang. *Root Mean Square Error*.

¹²² Ang. *Mean Absolute Error*.

¹²³ Ang. *Mean Absolute Percentage Error*.

s pomočjo kvadratov slučajnih napak. Zato tudi napovedno moč modelov ocenujemo s pomočjo kvadratov slučajnih odklonov in napovedmi varianc.

17.2 Asimetrične mere napak

Običajne mere napak, predstavljene v predhodnem poglavju, so simetrične. Simetrične jih imenujemo, ker pripišejo enako težo tako precenjevanju kot podcenjevanju volatilnosti. Vendar pa v realnosti investorji precenjevanju in podcenjevanju volatilnosti ne pripišejo enake teže. Kot primer lahko uporabimo volatilnost pri ocenjevanju cen opcij (Balban, 2006, str. 6). Podcenjevanje volatilnosti pomeni za izdajatelja opcije izgubo, medtem ko precenjevanje volatilnosti pomeni izgubo za kupca opcije.

Zato je smiselno razlikovati med negativnimi ter pozitivnimi odkloni napovedi volatilnosti in vsaki vrsti odklonov pripisati drugačno moč. Podcenjevanje tveganosti lahko penaliziramo močneje kot precenjevanje tveganosti in seveda obratno. Takšne mere napovedne moči modelov se imenujejo asimetrične mere (Balban, 2006, str. 16):

$$MME = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^{(O)} (e_{t+i}^2 - h_{f,t+i})^a + \sum_{i=1}^{(U)} (e_{t+i}^2 - h_{f,t+i})^b \quad (127)$$

Kjer (O) in (U) označujejo precenjevanje in podcenjevanje dejanske variance. Namesto a in b lahko vstavimo katerokoli potenco ali koren, pač v skladu s tem, kako želimo obravnavati pozitivne in negativne odklone. Najpogosteje močneje penaliziramo podcenjevanje tveganosti in v tem primeru bi lahko namesto b vstavili 1 in namesto a 1/2. Tako bi imelo podcenjevanje tveganosti prevladajoč vpliv na mešano povprečno napako¹²⁴ (MME).

Obstaja veliko mer napovedne moči modelov, predstavljene so zgolj najpogostejše. Težava ocenjevanja napovedne moči modela se skriva v dejstvu, da je lahko dottični model rangiran kot prvi pri eni meri ter npr. zadnji pri drugi meri. Objektivno pa ni mogoče določiti, katera mera je absolutno najboljša. Odločitev ostaja subjektivna glede na naravo problema in uporabnika napovedi. V kolikor se na primer želimo izogniti predvsem podcenjevanju volatilnosti, bomo seveda izbrali mero, ki penalizira podcenjevanje. V kolikor pa želimo predvsem čim bolj točne napovedi, bomo izbrali eno izmed simetričnih mer.

18. Tvegana vrednost

V predhodnem poglavju smo kot mero natančnosti napovedi predstavili mere napak napovedi, ki so »tehnične« mere natančnosti. Mere napak napovedi nimajo neposredne praktično uporabne vrednosti, zato v tem poglavju predstavljamo aplikacijo modelov pogojne variance v praksi. Obstaja veliko praktičnih aplikacij modelov pogojne variance, izmed katerih predstavljamo eno najpogostejših, to je tvegana vrednost¹²⁵ (v nadaljevanju VaR).

VaR je koncept, ki nam odgovori na vprašanje: »Najmanj kolikšno izgubo lahko pričakujemo, če se jutri zgodi eden izmed α % najslabših možnih tržnih premikov« (prirejeno po Geweke, 2003, str. 11). Pri uporabi tvegane vrednosti ovrednotimo možne izgube denarno ali

¹²⁴ Ang. *Mixed Mean Error*.

¹²⁵ Ang. *Value at Risk*.

relativno¹²⁶, tveganje dobi obliko. Banke in druge finančne ustanove izračunavajo tvegano vrednost na dnevni ravni ter so o njej obvezane poročati centralnim bankam¹²⁷. V skladu z baselskimi standardi lahko za izračun tvegane vrednosti uporabljajo variančno kovariančni pristop, historično simulacijo ali lasten pristop. V sklopu lastnega pristopa lahko uporabijo tudi ARCH modele, ki predstavljajo naprednejši pristop k ocenjevanju izpostavljenosti tržnim tveganjem. VaR ima tudi tržni potencial, Banka J. P. Morgan trži tehnologijo imenovano RiskMetrics, ki je v osnovi VaR izračunan z integriranim GARCH (1,1) modelom.

Statistično je tvegana vrednost, definirana kot α kvantil porazdelitve donosov. Z ARIMA modelom definiramo pogojno sredino in z ARCH modelom pogojno razpršenost donosov okoli sredine. Oboroženi smo z vsemi podatki, ki so potrebni za izračun kvantilov pogojne porazdelitve donosov (Fabozzi, 2007, str. 314):

$$VaR = y_\alpha = \left(E(y_t) - \eta_\alpha \sqrt{h_t} \right) * vr.poz. \quad (128)$$

$$\begin{aligned} oz. \\ \eta_t &\sim N(0, I) \\ VaR = y_{5\%} &= \left(E(y_t) - 1,65 \sqrt{h_t} \right) * vr.poz \end{aligned} \quad (129)$$

Enačba (129) nam odgovori na vprašanje: »Najmanj kolikšno izgubo lahko pričakujemo, če se jutri zgodi eden izmed 5 % najslabših tržnih premikov, pri čemer predpostavljamo, da se ostanki porazdeljujejo normalno?« Pri izračunu smo uporabili kritične vrednosti porazdelitvene funkcije za standardizirano normalno porazdelitev¹²⁸. Kadar pa predpostavimo, da se ostanki porazdeljujejo v Studentovi t porazdelitvi, je izračun VaR nekoliko drugačen (Tsay, 2002, str. 263):

$$VaR = y_\alpha = \left(E(y_t) - \frac{\eta_\alpha}{\sqrt{v/(v-2)}} \sqrt{h_t} \right) * vr.poz. \quad (130)$$

$$\begin{aligned} oz. \\ \eta_t &\sim t(0, 1, v) = t(0, 1, 10) \\ VaR = y_{5\%} &= \left(E(y_t) - 1,62 \sqrt{h_t} \right) * vr.poz \end{aligned} \quad (131)$$

Pri izračunu uporabimo kritične vrednosti standardizirane Studentove t porazdelitve, ki jih popravimo za stopinje prostosti, v. Z enačbo (131) izračunamo 5 % kvantil Studentove t porazdelitve z desetimi stopinjami prostosti. Studentova t porazdelitev ima debelejše repe od normalne porazdelitve in praviloma bolje opisuje časovne vrste. Iz enačb (129) in (131) je razvidno, da bi bil izračunani VaR enako ocenjene variance pod predpostavko, da se ostanki porazdeljujejo v Studentovi t porazdelitvi višji kot v primeru normalno porazdeljenih ostankov.

¹²⁶ Relativno v obliki: »Kolikšen % vrednosti pozicije lahko izgubimo.«

¹²⁷ V sklopu Basel II standarda.

¹²⁸ V statistični literaturi spremenljivko, ki se porazdeljuje standardizirano normalno, ponavadi označujemo s črko z, vrednosti njene porazdelitvene funkcije v statističnem žargonu imenujemo »z-score«.

19. Analiza končnih rezultatov in primerjava cenilk

19.1 Postopkovne in metodološke razlike

V predhodnem poglavju smo obravnavali konceptualne razlike med ML in Bayes cenilko. Na tem mestu pa bi radi opozorili na nekatere postopkovne razlike pri ocenjevanju modelov z eno in drugo metodo.

Pri ocenjevanju modelov z ML cenilko smo uporabili statistični program za analizo časovnih vrst STATA. Statistični program STATA je profesionalni statistični paket za analizo časovnih vrst in kot tak vsebuje veliko naprednejših metod za izračun ML ocen koeficientov. Pri izračunu Bayesovskih ocen koeficientov smo uporabili statistični program WinBugs. WinBugs je program, ki se je razvil iz področja biostatike in kot tak ne vsebuje posebnih metod za ocenjevanje časovnih vrst. V nasprotju s STATA-o ki je modularen program, WinBugs zahteva večji vložek ocenjevalca modelov. Modele je potrebno v WinBugs-u opisati s programsko kodo in določiti lastne začetne vrednosti za zagon algoritmov (za primer kode glej Prilogo 14). STATA to opravi sama. Obenem je WinBugs zelo počasen pri ocenjevanju modelov, ki vsebujejo latentne oz. neopazovane pojasnjevalne spremenljivke (kot npr. slučajni odkloni pri MA modelih ter odlogi pogojne variance pri GARCH modelih). Zato se postopek ocenjevanja modelov pri ML in Bayes cenilki v prvem delu analize razlikuje. V prvem delu analize smo ocenjevali pet najboljših modelov, pri čemer smo predpostavili, da se ostanki modelov porazdeljujejo normalno.

V prvem delu smo s statističnim paketom STATA modele ocenjevali simultano. Pogojna sredina in pogojna varianca sta bili pri ML cenilki ocenjeni hkrati. Obenem ima STATA za izračun ocen koeficientov implementiran poseben postopek, s katerim pospeši in izboljša ocenjevanje. STATA sprva model pogojne variance spremeni v analogen ARIMA model in nato tako model sredine kot pogojne variance v t. i. model prostorskih stanj¹²⁹. Nadalje obravnava model prostorskih stanj. S pomočjo t. i. Kalmanovega filtra maksimizira logaritem verjetja. Pri ocenjevanju z Bayes cenilko zaradi pomanjkljivega znanja model ni bil transformiran v model prostorskih stanj.

STATA pri ocenjevanju ARCH modelov uporablja pogojno funkcijo verjetja, pogojuje na opazovanjih na začetku časovne vrste (potrebno pa je opozoriti, da STATA za ocenjevanje sredine brez ARCH učinkov uporablja brezpogojno funkcijo verjetja). V programu WinBugs smo specificirali popolno funkcijo verjetja in uporabili različne porazdelitve za neopazovane vrednosti pred začetkom časovne vrste. Naj omenim, da so imele različne specifikacije za vrednosti pred začetkom časovne vrste minimalen oz. ničen vpliv na posteriorne ocene koeficientov.

Kot smo že omenili, smo s programskim paketom STATA koeficiente ARIMA-ARCH modela ocenjevali simultano. WinBugs je splošen statistični program namenjen ocenjevanju široke palete modelov. WinBugs ni specializiran za ocenjevanje časovnih vrst in je kot tak pri ocenjevanju modelov z latentnimi pojasnjevalnimi spremenljivkami zelo počasen (npr. potrebuje veliko časa, da sestavi funkcijo posteriorne gostote in iz posteriorne gostote vzorči zelo počasi). Zato smo v prvem delu analize pri ocenjevanju z Bayes cenilko na začetku

¹²⁹ Ang. *State Space*.

uporabili dvostopenjski pristop. Pri dvostopenjskem pristopu sprva ocenimo model sredine in nato na podlagi ostankov modela sredine ocenimo model pogojne variance.

Dvostopenjski pristop navaja tudi Fabozzi (2008, str. 249). Po mnenju dr. Brian P. Poi-a, ekonomista in svetovalca pri razvoju programske opreme STATA, naj bi bile točkovne ocene regresijskih koeficientov pri simultanem in dvostopenjskem pristopu k ocenjevanju enake. ML in Bayes cenilka ostaneta nepristranski. Vendar pa Mills (1999, str. 146) meni, da ignoriranje ARCH učinka vodi do napačno specificiranega modela, praviloma zasičenega s pojasnjevalnimi spremenljivkami, saj so standardne napake takšnega modela premajhne. Dvostopenjski pristop v osnovi ignorira ARCH učinek, saj le-ta nima povratnega vpliva na enačbo sredine.

Pri Bayes cenilki ne maksimiziramo funkcije verjetja, temveč poskušamo oceniti posteriorne porazdelitve koeficientov. Teoretično bi morala biti oblika posteriorne porazdelitve pri obeh metodah enaka. Vendar pa je algoritem, s katerim vzorčimo zaporedne vrednosti parametrov, »pretrgan«. Kar pomeni, da si modela sredine in pogojne variance ne izmenjujeta predlagane (sprejete) vrednosti regresijskih koeficientov in nove predlagane vrednosti ne formirata na podlagi zaporedno ocenjenih drugih koeficientov. Modela sta ocenjena ločeno. Slabost takšnega pristopa je, da koeficienti pogojne variance niso ocenjeni na celotnem prostoru možnih vrednosti. Možni podprostor je omejen s fiksнимi vrednostmi ARIMA koeficientov.

V drugem delu smo po en najboljši model v vsakem vzorcu (predhodno izbran s pomočjo BIC kriterija) ojačali s predpostavko, da se slučajne napake porazdeljujejo v studentovi t porazdelitvi. Pri teh modelih sem tudi pri Bayesovskem pristopu uporabil simultano ocenjevanje sredine in variance¹³⁰.

Programski paket STATA nima pri ocenjevanju koeficientov vgrajenih nikakršnih omejitev glede predpostavk modela. Zato lahko algoritem, ki ocenjuje funkcijo verjetja, konvergira tudi na prostoru koeficientov, ki ni v skladu s predpostavkami modela. Npr. dobljene ocene koeficientov niso skladne s stacionarnostjo ali invertibilnostjo. V programske paketu WinBugs smo implicitno vključili tudi nekatere predpostavke modelov. Npr. priorna porazdelitev MA koeficiente je enakomerna na intervalu od -1 do 1 tako, da je predpostavka o invertibilnosti modela implicitno vgrajena v programske kodo modela.

19.2 Rezultati

Da bi laže interpretirali rezultate, je na tem mestu primerno ponoviti logiko in postopek pri ocenjevanju modelov. Dne 29. avgusta 2008 se prvič postavimo v vlogo ocenjevalca/upravljalca tveganosti vrednostnih papirjev in si zamislimo, da bi postopali na sledeč način. Menimo, da so se zaradi zloma borznega trga v nedavni preteklosti (24. dec. 2007) korenito spremenili tako odnos med tveganjem in donosnostjo, kot med inercijo, ki vlada zaporednim vrednostim tveganosti. Smiselno bi bilo torej uporabiti vse razpoložljive podatke o donosih, za katere menimo, da odražajo na novo nastale razmere, ki vladajo finančnim trgom. Zato za prvi vzorec vzemimo vse razpoložljive podatke, od dneva zloma borznega indeksa SBI20 dne 24. decembra 2007 do današnjega dne - 29. avgusta 2008. V teh

¹³⁰ V utemeljitev, zakaj pri Bayesovski cenilki nismo uporabili simultanega ocenjevanja tudi v prvem krogu ocenjevanja (kjer se predpostavlja, da se slučajne napake porazdeljujejo normalno), naj povem, da je simultano ocenjevanje modela trajalo nekaj dni.

volatilnih časih se osredotočamo predvsem na tveganje, kateremu se izpostavljam z investiranjem v košarico vrednostnih papirjev, ki tvorijo indeks SBI20. Ker pa je tudi sam proces generiranja vrednosti indeksa SBI20 podvržen dinamičnim spremembam, konec vsakega meseca preverimo veljavnost modelov, ki jih uporabljamo pri napovedovanju vrednosti in tveganosti indeksa. Tako dne 29. avgusta analiziramo prvi vzorec, izberemo 5 najprimernejših modelov družine ARCH ter nato v mesecu septembru 2008 pripravimo napovedi tveganosti z najnovejšimi podatki, za en dan naprej. Vajo ponovi konec septembra, oktobra, novembra in decembra. Skupaj imamo torej pet zaporednih vzorcev, za katere ocenimo pet najboljših modelov in jih uporabimo pri napovedovanju tveganosti v sledečem mesecu. Nazadnje najboljši model vsakega vzorca oplemenitimo s predpostavko o ostankih, ki se porazdeljujejo v Studentovi t porazdelitvi.

Zanima nas učinkovitost različnih tehnik ocenjevanja in napovedovanja, natančneje, primerjali bomo učinkovitost metode največjega verjetja in Bayesovske metode. Ker je Bayesovska metoda računsko izjemno intenzivna, modelov nismo izbirali s pomočjo Bayesovskih metod. Modele izbrane z metodo največjega verjetja smo naknadno ocenili še z Bayesovskimi metodami.

19.2.1 Evolucija modelov

Klasična frekventnostna ekonometrija predpostavlja, da obstaja zgolj en pravi populacijski model, unikatne vrednosti regresijskih parametrov. Bayesovska ekonometrija priznava hkratno veljavnost vseh regresijskih modelov. Bayesovski ekonometriki menijo, da so tudi regresijski parametri slučajne spremenljivke, zato je vsak model pravilen model. Razlikujejo se zgolj v verjetnosti. V tabelah 1-5 (Priloga 10) predstavljamo 5 najprimernejših modelov za vsakega izmed petih vzorcev, izbranih s pomočjo informacijskih kriterijev in ML cenilko.

Razvidno je, da so določeni modeli venomer kandidati za napovedovanje tveganosti indeksa. Npr. enostaven ARCH model z dvema odlogoma je v vsakem izmed petih vzorcev uvrščen med peterico najprimernejših modelov. V prvem, najmanjšem, vzorcu je izbran za najboljši model, nato pa tekom povečevanja števila opazovanj polzi po lestvici najboljših modelov vse do petega mesta v zadnjem vzorcu. Pragovni ARCH modeli so prav tako konstantno na lestvici najprimernejših modelov, vendar pa se nikakor ne uspejo prebiti iz zlate sredine najprimernejših modelov. Od drugega vzorca dalje se kot možni kandidati pojavijo GARCH modeli in njegove izvedenke. V zadnjih dveh vzorcih prevladuje pragovni GARCH model.

Skozi čas, ko se povečuje število opazovanj, proces generiranja tveganosti indeksa evolvira. Od enostavnega ARCH procesa, preko postopnega uveljavljanja pragovnih in GARCH modelov, vse do dominacije pragovnega GARCH modela. Klasična ekonometrija bi evolucijo procesa lahko razložila na sledeč način. Ker od vzorca do vzorca prihaja do struktturnih premikov, nikoli ne ocenimo pravega populacijskega modela, ki bi bil sposoben posnemati proces generiranja tveganosti, saj se le-ta konstantno spreminja. Torej so naši vzorci na splošno oblikovani napačno. Npr. vzorec številka 2 dejansko vsebuje podatke dveh ali treh različnih procesov generiranja tveganosti, torej noben model ni pravi populacijski model generiranja podatkov, saj vzorec vsebuje več populacij ali delov populacij. Druga možnost bi bila, da v ozadju vseh vzorcev obstaja en in edini pravi proces generiranja podatkov, vendar je tako kompleksen, da ga nismo sposobni modelirati. Z vsakim novim vzorcem dobimo nov »pravi« model, ki pa zgolj ustrezza podatkom, ki jih je tokrat generiral pravi populacijski model. Bistvo obeh stališč je, da pravega populacijskega modela nismo sposobni modelirati.

Bayesovski ekonometrik zavzame drugačno stališče. Pravi populacijski model ne obstaja. Vsi parametri modelov so spremenljivke in kot take podvržene spremjanju. S časom se regresijski koeficienti evolvirajo, saj so spremenljivke, tako kot se spreminja pojav sam. Noben izmed gornjih petih modelov ni napačen, saj pravi populacijski model ne obstaja, obstajajo zgolj bolj ali manj verjetni modeli. Ker se parametri skozi čas spreminja, se spreminja tudi verjetnost posameznega modela.

19.2.2 Primerjava informacijskih kriterijev

Pri izbiri najboljših modelov pogojne variance smo se oprli na informacijske kriterije. Modele, ocenjene po metodi največjega verjetja, smo rangirali po vrednosti Bayesovskega informacijskega kriterija (BIC), izločili neprimerne modele ter najboljših pet modelov ocenili še s pomočjo Bayesovske metode. Nazadnje smo modele rangirali še po vrednosti informacijskega kriterija odklonskosti (DIC), ki se uporablja kot informacijski kriterij v Bayesovski ekonometriji. BIC in DIC navkljub podobnim vrednostim nista medsebojno primerljiva kriterija. Primerjamo lahko le ranžirni vrsti modelov.

Tabela 4: Ranžirni vrsti informacijskih kriterijev glavnega vzorca, 24. dec. 2008 do 31. avg. 2009

BIC RANG	BIC	DIC RANG	DIC	MODEL
1	946,86	1	928,43	ARCH(1) TARCH(1) GARCH(1)
2	967,64	5	968,56	ARCH(2) TARCH(2)
3	970,16	2	947,82	ARCH(2) TARCH(1)
4	977,95	4	959,55	ARCH(1) GARCH(1)
5	978,09	3	959,24	ARCH(2)

Vir: Podatkovna baza Ljubljanske borze, 2009.

Čeprav konceptualno različna informacijska kriterija, BIC in DIC delujeta usklajeno (glej Tabelo 4, ki vsebuje ranžirni vrsti informacijskih kriterijev glavnega vzorca ter Prilogo 11). V štirih izmed petih vzorcev izbereta kot najboljši enak model, izjema je zgolj drugi vzorec. Model, ki velja za najslabšega po BIC je tudi po DIC rangiran na zadnjem oz. predzadnjem mestu. Kadar je npr. model A po vrednosti BIC rangiran pred modelom B in model B po vrednosti DIC rangiran pred modelom A, je ponavadi absolutna razlika med zaporednima vrednostima informacijskega kriterija zelo majhna, celo zanemarljiva (2. vzorec; modela 1 in 2 in 3. vzorec; modela 2 in 3). Če bi odmislili manjše absolutne razlike med vrednostmi BIC ali DIC bi bile ranžirne vrste primernosti modelov skoraj enake.

Oba informacijska kriterija tehtata med prileganjem modela podatkom in kompleksnostjo modela. Osnovna logika njunega delovanja je enaka. Povedali smo tudi že, da smo pri oblikovanju priornih porazdelitev parametrov pri Bayesovskem pristopu uporabili relativno neinformativne priorne porazdelitve parametrov. Uporaba neinformativnih priornih porazdelitev pomeni, da v posteriorni porazdelitvi prevlada moč podatkov. Najverjetnejše je to tudi vzrok, da so modeli po vrednostih informacijskih kriterijev razvrščeni zelo podobno.

19.2.3 Primerjava ocenjenih vrednosti regresijskih koeficientov

V Prilogi 10 so predstavljene ocenjene vrednosti regresijskih koeficientov modelov skupaj s pripadajočimi standardnimi odkloni (v oklepajih). Bayesovska metoda ocenjevanja temelji na tehtanju podatkov in priorne porazdelitve. V kolikor imamo veliko podatkov in uporabimo neinformativne priorne porazdelitve parametrov, bi morale biti Bayesovske ocene blizu ML

ocenam. Zato smo pričakovali, da bodo v manjših vzorcih razhajanja med ocenami koeficientov obeh metod večja kot v večjih vzorcih. Iz podatkov je razvidno, da temu ni tako. Ocene nekaterih modelov so podobne in nekaterih popolnoma različne, ne glede na velikost vzorca. Za ponazoritev, obe oceni regresijskih koeficientov, ML in Bayes ocena, drugega modela v prvem vzorcu in prvega modela v petem vzorcu sta skoraj enaki. Obenem pa je npr. prisotno veliko razhajanje v vrednosti ocen tako v tretjem modelu prvega vzorca kot v drugem modelu petega vzorca.

Tabela 5: Nekatere ocene vrednosti regresijskih koeficientov

VZOREC 1						
2 ARCH(2) TARCH(1)	pogojna sredina		pogojna varianca			
	const.	L1.ma	const.	L1.arch	L2.arch	L1.tarch
ML		0,41 (0,08)	0,61 (0,11)	0,62 (0,21)	0,31 (0,12)	-0,47 (0,22)
		0,33 (0,07)	0,65 (0,13)	0,65 (0,19)	0,32 (0,12)	-0,45 (0,21)
3 ABARCH(2)	pogojna sredina		pogojna varianca			
	const.	L1.ma	const.	L1.abarch	L2.abarch	
ML		0,38 (0,08)	0,66 (0,06)	0,37 (0,08)	0,26 (0,09)	
		0,33 (0,07)	0,40 (0,15)	0,78 (0,15)	0,64 (0,18)	
VZOREC 5						
1 ARCH(1)-TARCH(1)-GARCH(1)	pogojna sredina		pogojna varianca			
	const.	L1.ma	const.	L1.arch	L1.tarch	L1.garch
ML	-0,42 (0,10)	0,31 (0,06)	0,13 (0,05)	0,51 (0,12)	-0,54 (0,12)	0,75 (0,05)
	-0,43 (0,15)	0,19 (0,06)	0,20 (0,07)	0,60 (0,13)	-0,60 (0,13)	0,68 (0,06)
2 MA(1)-ARCH(2)-TARCH(2)	pogojna sredina		pogojna varianca			
	const.	L1.ma	const.	L1.arch	L2.arch	L1.tarch
ML	-0,43 (0,12)	0,27 (0,08)	1,00 (0,11)	0,76 (0,28)	0,66 (0,23)	-0,69 (0,28)
	-0,43 (0,15)	0,19 (0,06)	0,97 (0,03)	0,13 (0,05)	0,12 (0,06)	-0,12 (0,05)
VZOREC 5						
1 ARCH(1)-TARCH(1)-GARCH(1)	pogojna sredina		pogojna varianca			
	const.	L1.ma	const.	L1.arch	L1.tarch	L1.garch
ML	-0,42 (0,10)	0,31 (0,06)	0,13 (0,05)	0,51 (0,12)	-0,54 (0,12)	0,75 (0,05)
	-0,43 (0,15)	0,19 (0,06)	0,20 (0,07)	0,60 (0,13)	-0,60 (0,13)	0,68 (0,06)
2 MA(1)-ARCH(2)-TARCH(2)	pogojna sredina		pogojna varianca			
	const.	L1.ma	const.	L1.arch	L2.arch	L1.tarch
ML	-0,43 (0,12)	0,27 (0,08)	1,00 (0,11)	0,76 (0,28)	0,66 (0,23)	-0,69 (0,28)
	-0,43 (0,15)	0,19 (0,06)	0,97 (0,03)	0,13 (0,05)	0,12 (0,06)	-0,12 (0,05)

Vir: Podatkovna baza Ljubljanske borze, 2009.

Možno je, da razlike v velikosti vzorcev enostavno niso dovolj velike, da bi se moč podatkov izrazila skozi število opazovanj. Prvi vzorec vsebuje 168 opazovanj, zadnji vzorec pa 253 opazovanj. Zadnji vzorec vsebuje 85 opazovanj več oziroma 50 % več opazovanj kot prvi vzorec. Kljub temu pa ne smemo zanemariti dejstva, da tako prvi kot zadnji vzorec v finančnem svetu štejeta za zelo majhna vzorca.

Drugi dejavniki, ki bi lahko povzročili razlike med ocenjenimi vrednostmi regresijskih koeficientov, so: algoritem ML ocene je zašel v lokalni maksimum, uporabljeni neinformativni priorji le niso tako zelo neinformativni (namreč - večinoma so skladni s predpostavkami o stacionarnosti in invertibilnosti modelov), Markova veriga Bayesovskega pristopa ni konvergirala, oz. je bila vseskozi ujeta v neprimerinem podprostoru. Zadnji argument je glede na dobro mešanje Markovih verig malo verjeten.

19.2.4 Primerjava napovedne moči, RMSE

Rangi ocenjenih modelov so podobni. Ocenjene vrednosti koeficientov so pri nekaterih modelih skoraj identične in pri nekaterih popolnoma različne. Sedaj nas zanima, kako se ocenjeni modeli obnašajo zunaj vzorca.

Kot prvo lahko opazimo, da model, ki po katerem izmed kriterijev (BIC ali DIC) velja za najprimernejšega za modeliranje pojave, ni nujno tudi najboljši pri izvenvzorčnih napovedih (glej Prilogo 11 in Tabelo 6). Oba kriterija kot najprimernejši model za modeliranje pojave dvakrat izbereta model, ki je tudi najprimernejši (merjeno z RMSE) za napovedovanje tveganosti indeksa.

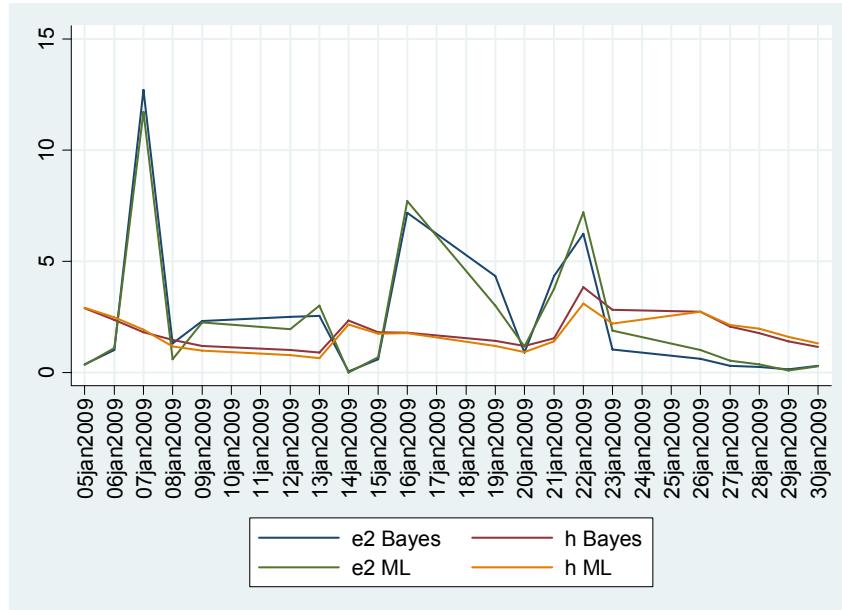
Tabela 6: Primerjava skladnosti informacijskih kriterijev z izvenvzorčnimi napovedmi (RMSE) najboljših modelov (izbranih z BIC in DIC)

VZOREC	MODEL	ML metoda				Bayes metoda			
		BIC RANG	BIC	RMSE	RMSE RANG	DIC RANG	DIC	RMSE	RMSE RANG
1	ARCH(2)	1	557,82	11,77	4	1	548,12	11,31	4
2	ARCH(2) TARCH(2)	1	649,46	16,38	2	1	624,22	15,05	1
3	ARCH(1) TARCH(1) GARCH(1)	1	758,61	12,85	3	1	743,63	13,85	5
4	ARCH(1) TARCH(1) GARCH(1)	1	857,76	5,83	1	1	841,56	6,02	2
5	ARCH(1) TARCH(1) GARCH(1)	1	946,86	2,85	1	1	928,43	2,89	1

Vir: Podatkovna baza Ljubljanske borze, 2009.

V kolikor primerjamo obe metodi ocenjevanja glede na natančnost napovedi, merjeno z RMSE, ugotovimo, da se napovedi razlikujejo le malenkostno tako med modeli kot med metodama. To je razvidno tudi iz Slike 7, ki vsebuje napovedi pogojnih volatilnosti in dejanskih kvadriranih ostankov (za ostale slike glej Prilogo 12). Kvadrirani ostanki nam služijo kot strežnik za pravo/realizirano tveganost in so ocenjeni v trenutku t . Napovedi pogojne variance oz. napovedi tveganosti pa so generirane v trenutku $t-1$, za en korak naprej. Spomnimo se, da je kriterij RMSE izračunan iz teh dveh spremenljivk.

Slika 7: Graf realizirane volatilnosti (e_2) in napovedi pogojne variance (h) najboljšega modela v zadnjem vzorcu, MA(1)-ARCH(1)-TARCH(1)-GARCH(1), ocenjen v obdobju 24. dec. 2007 – 29. avg. 2008, napovedi generirane za obdobje 05. jan. 2009 – 30. jan. 2009



Vir: Podatkovna baza Ljubljanske borze, 2009.

Iz grafov je razvidno, da obe metodi generirata približno enake napovedi tveganosti ter enake vrednosti realizirane tveganosti. Napovedi tveganosti obeh metod se slabše izkažejo predvsem v trenutkih visokih tržnih premikov (glej npr. sedmi januar 2009 na Sliki 7). Govorimo o

problemu »osamelcev¹³¹«. Spomnimo se, da smo pri ocenjevanju predpostavljeni, da se ostanki porazdeljujejo normalno, nato pa z ARCH modeli normalno porazdelitev ostankov modifirali tako, da je postala leptokurzična. Leptokurzična porazdelitev izkazuje debelejše repe od normalne porazdelitve, kar praktično pomeni, da skrajnim vrednostim (t.j. velikim ostankom) pripisuje višjo verjetnost kot pa normalna porazdelitev. Iz grafov je razvidno, da ARCH modeli z normalno porazdeljenimi ostanki ne uspejo popolnoma zajeti leptokurzičnosti ostankov. V kolikor bi popolnoma zajeli leptokurzičnost ostankov, bi osamelcu sledila višja napovedana pogojna tveganost. Omenjeno slabost skušamo odpraviti tako, da predpostavimo, da se ostanki porazdeljujejo v Studentovi t porazdelitvi.

Razlike med metodama so sicer majhne, kljub temu pa obstajajo. To se odraža tudi v izračunanih vrednostih RMSE in MME. Kljub majhnim razlikam v natančnosti napovedi je opaziti, da so modeli ocenjeni z Bayesovsko cenilko konsistentno učinkovitejši od modelov ocenjenih s cenilko največjega verjetja v prvih dveh napovednih obdobjih (glej Tabelo 7 in Prilogo 11). Sčasoma z večanjem obsega podatkov pa postajata učinkovitosti cenilk enakovredni.

Tabela 7: Primerjava napak izvenvzorčnih napovedi med metodama

MODEL	RMSE		MME	
	Bayes	ML	Bayes	ML
1. vzorec: 24. dec. 2007 - 29. aug. 2008 (n=168)				
ARCH(2)	11,31	11,77	4,61	4,63
ARCH(2) TARCH(1)	10,24	10,71	4,27	4,29
ABARCH(2)	10,38	11,02	4,06	4,26
ABARCH(1)	10,58	11,23	4,33	4,50
ARCH(1)	11,98	12,69	4,86	4,96
2. vzorec: 24. dec. 2007 - 30. sept. 2008 (n=190)				
ARCH(2) TARCH(2)	15,05	16,38	8,29	8,84
ARCH(2) TARCH(1)	15,28	14,81	7,92	8,01
ABARCH(2)	22,81	23,48	13,18	14,03
ARCH(1) GARCH(1)	17,05	18,70	9,56	10,69
ARCH(2)	17,84	18,58	10,05	10,53
3. vzorec: 24. dec. 2007 - 30. oct. 2008 (n=212)				
ARCH(1) TARCH(1) GARCH(1)	13,85	12,85	6,51	6,57
ARCH(2) TARCH(2)	11,93	13,98	5,39	6,40
ARCH(2) TARCH(1)	13,79	15,48	6,41	6,83
ABARCH(2)	11,39	12,21	5,11	5,72
ARCH(2)	12,91	12,67	6,01	5,77
4. vzorec: 24. dec. 2007 - 28. nov. 2008 (n=212)				
ARCH(1) TARCH(1) GARCH(1)	6,02	5,83	3,12	3,17
ARCH(2) TARCH(2)	5,87	6,31	3,29	3,11
ARCH(2) TARCH(1)	6,13	6,48	3,04	3,10
ARCH(1) GARCH(1)	6,57	6,45	3,49	3,60
ARCH(2)	6,65	6,57	3,49	3,47
5. vzorec: 24. dec. 2007 - 30. oct. 2008 (n=212)				
ARCH(1) TARCH(1) GARCH(1)	2,89	2,85	1,20	1,20
ARCH(2) TARCH(2)	2,90	2,93	1,21	1,19
ARCH(2) TARCH(1)	3,10	3,08	1,21	1,19
PARCH(2)	3,33	2,85	1,25	1,19
ARCH(1) GARCH(1)	3,25	3,07	1,24	1,21

Vir: Podatkovna baza Ljubljanske borze, 2009.

¹³¹ Ang. Outlier.

Povedano je moč utemeljiti z dejstvom, da smo pri Bayesovski cenilki uporabili priorne porazdelitve, ki so skladne s stacionarnostjo in invertibilnostjo. Modeli ocenjeni z Bayesovsko cenilko so torej ocenjeni na ožjem podprostoru, kar je lahko ob pomanjkanju podatkov velika prednost. Predhodna prepričanja so se izkazala za učinkovita. Z večanjem vzorca se prednost predhodnih prepričanj porazgubi med podatki.

V kolikor izračunamo povprečne odstotne razlike med ocenjenimi vrednostmi koeficientov modelov obeh metod na sledeč način:

$$\bar{\Delta}\% = \frac{\sum_{k=1}^K \left| \frac{\theta_{ML,k} - \theta_{Bayes,k}}{\theta_{osn.,k}} \right|}{K} * 100 \quad (132),$$

kjer θ predstavlja vektor ocenjenih regresijskih koeficientov in K število regresijskih koeficientov v modelu, lahko pristavimo še zadnjo ugotovitev. Kadar je povprečna absolutna odstotna razlika ocenjenih vrednosti regresijskih koeficientov obeh metod večja od 50 % (glej Prilogo 11; razlike, višje od 50 %, so obarvane rumeno), so napake izvenvzorčnih napovedi tveganosti v povprečju višje pri metodi največjega verjetja, merjene z RMSE. Pri tem ni pomembno, ali za osnovo vzamemo Bayesovske ocene koeficientov ali koeficiente ocenjene po metodi največjega verjetja. V primeru visokih razlik med ocenjenimi vrednostmi koeficientov Bayesovska metoda generira natančnejše napovedi v 6-ih izmed 8-ih napovedi. V kolikor iz primerjave izločimo prva dva vzorca, kjer Bayesovske napovedi izrazito prednjačijo, ostaja razmerje s 4:1 v prid Bayesovskim napovedim.

Tabela 8: Primerjava napak izvenvzorčnih napovedi obeh metod, kadar so razlike med koeficienti velike

MODEL	RMSE		MME		Povp. % razl. (osn.=ML)	Povp. % razl. (osn.=Bayes)
	Bayes	ML	Bayes	ML		
1. vzorec: 24. dec. 2007 - 29. aug. 2008 (n=168)						
ABARCH(2)	10,38	11,02	4,57	4,56	77%	48%
2. vzorec: 24. dec. 2007 - 30. sept. 2008 (n=190)						
ARCH(1) GARCH(1)	17,05	18,70	9,56	10,69	71%	45%
3. vzorec: 24. dec. 2007 - 30. oct. 2008 (n=212)						
ARCH(2) TARCH(2)	11,93	13,98	5,39	6,40	57%	280%
ABARCH(2)	11,39	12,21	5,11	5,72	79%	52%
4. vzorec: 24. dec. 2007 - 28. nov. 2008 (n=212)						
ARCH(2) TARCH(2)	5,87	6,31	3,29	3,11	51%	257%
ARCH(1) GARCH(1)	6,57	6,45	3,49	3,60	68%	54%
5. vzorec: 24. dec. 2007 - 30. oct. 2008 (n=212)						
ARCH(2) TARCH(2)	2,90	2,93	1,21	1,19	52%	271%
PARCH(2)	3,33	2,85	1,25	1,19	60%	44%

Vir: Podatkovna baza Ljubljanske borze, 2009.

Povsem mogoče je, da je to predvsem odraz neizkušenosti ocenjevalca in ne superiornosti ene metode nad drugo. Pri Bayesovski metodi je namreč lažje nadzorovati konvergenco verige ocen, kot pa je pri metodi največjega verjetja preveriti, ali se je algoritmom dejansko usidral v globalni maksimum. Poleg povedanega pa trditev temelji na zgolj osmih oziroma šestih modelih, kar je premalo za trdnost sklepov. Obravnavamo jo lahko zgolj kot namig.

Osnovni šibkosti gornjih sklepov sta majhnost vzorca (tako po številu opazovanj kot številu ocenjenih modelov) in nepoznavanje pravega procesa, ki je general podatke (podatke, na katerih so modeli ocenjeni, in podatke za čas napovedi). Možno je, da dobljeni rezultati ne temeljijo na splošnih zakonitostih, ki vladajo v odnosu med Bayesovskimi metodami in

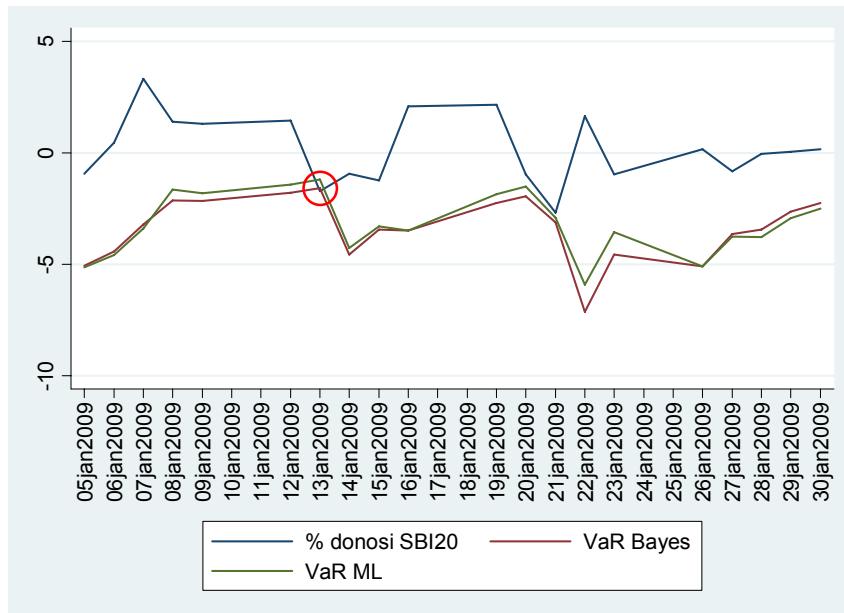
klasičnimi metodami, temveč na unikatnosti vzorca. V realnosti ne moremo zagotovo ugotoviti, kaj je pravi razlog dobljenih sklepov. Potrebna bi bila nadaljnja raziskovanja, in sicer takšna, kjer bi sami določili proces generiranja podatkov (npr. izbrali bi določen model in vrednosti populacijskih koeficientov) ter iz izbranega procesa umetno generirali časovne vrste. Šele ko bi nadzorovali tudi proces generiranja podatkov, bi lahko z visoko verjetnostjo predložili sklepe, kot so zgornji.

19.2.5 Primerjava napovedi tvegane vrednosti, VaR

Praktično aplikacijo modeliranja nestanovitnosti predstavljamo v obliki tvegane vrednosti, orodja za uravnavanje tržnega tveganja. Tvegana vrednost nam odgovori na vprašanje, najmanj kolikšno izgubo lahko pričakujemo, v kolikor se jutri zgodi eden izmed α % najslabših tržnih premikov. Izračunali smo 5% kvantile tvegane vrednosti vseh modelov obeh metod ter ju/jih primerjali.

Tvegana vrednost dobro opravlja svoje delo takrat, kadar so tržni premiki v 5-ih % primerov višji kot pa izračunana vrednost. Slika 8 prikazuje napovedi tvegane vrednosti meseca januarja 2009 (za druge napovedi glej Slike 1-24 v Prilogi 13). Mesec januar vsebuje 20 delovnih dni, kar pomeni, da morajo dejanski donosi indeksa SBI20 preseči izračunano tvegano vrednost natanko en dan v mesecu. V mesecu januarju donos indeksa SBI20 preseže tvegano vrednost dne 13. januarja.

Slika 8: Graf donosov indeksa SBI20 in izračunana tvegana vrednost najboljšega modela v zadnjem vzorcu, MA(1)-ARCH(1)-TARCH(1)-GARCH(1), ocenjen v obdobju 24. dec 2007 – 29. avg. 2008, napovedi generirane za obdobje 05. jan. 2009 – 30 jan. 2009



Vir: Podatkovna baza Ljubljanske borze, 2009.

V zgornjem primeru tvegana vrednost idealno opravi svoje delo. Vendar pa temu ni vedno tako. V Prilogi 11 so predstavljene prekoračitve tvegane vrednosti vseh vzorcev in modelov. Iz tabele je razvidno, da tvegana vrednost bolje opravlja svojo vlogo v drugem, četrtem in petem vzorcu. Izredno slabo pa se izkaže v prvem in tretjem vzorcu. Obenem se zdi, da sta obe cenilki pri izračunu tvegane vrednosti enako učinkoviti.

19.2.6 Modeli ojačani s Studentovo t porazdelitvijo

ARCH modeli le deloma zajamejo leptokurtičnost donosov in ostankov. Veliko bolje jo posnemajo modeli, katerih ostanki se porazdeljujejo v Studentovi t porazdelitvi. Zato smo za konec v vsakem vzorcu po en izbrani model ocenili še s predpostavko, da se ostanki porazdeljujejo v Studentovi t porazdelitvi. V tem zadnjem delu smo tudi pri Bayesovski metodi uporabili simultani pristop k ocenjevanju sredine in variance, zato je v tem delu primerjava učinkovitosti obeh cenilk morda bolj upravičena kot v prvem delu.

Pred primerjavo učinkovitosti cenilk si bomo ogledali, kako predpostavka o porazdelitvi ostankov vpliva na ocene koeficientov modelov. Vrednosti regresijskih parametrov so nekoliko spremenjene. Večje spremembe vrednosti regresijskih parametrov je opaziti pri Bayesovski cenilki (glej Prilogo 10), kar je najverjetneje posledica spremembe pristopa k ocenjevanju modelov. Pri Bayesovski cenilki smo v prvem delu, ko smo predpostavili, da se ostanki porazdeljujejo normalno, uporabili dvostopenjski pristop. V drugem delu pri obeh metodah uporabljam pristop simultane ocenitve sredine in variance. Kljub temu da naj bi oba pristopa vodila k enakim točkovnim ocenam, so se Bayesovske ocene spremenile bolj kot ML ocene. Vrednosti regresijskih koeficientov, ocenjenih z ML cenilko, so ostale skoraj enake. Za primer v spodnji tabeli predstavljam ocene koeficientov najboljšega modela glavnega vzorca.

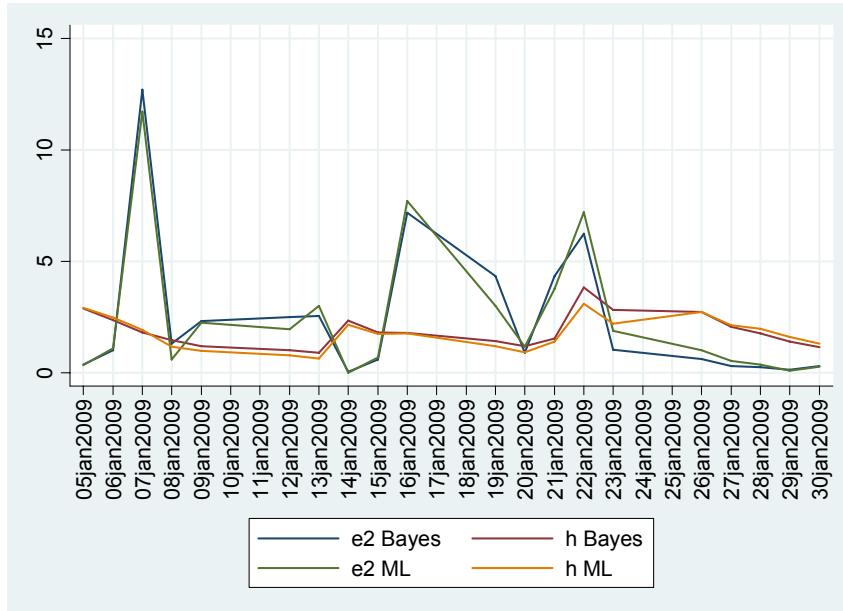
Tabela 9: Primer ocenjenih koeficientov glede na porazdelitev ostankov

VZOREC 5 - MODEL 1							Porazdelitev ostankov	
MA(1)-ARCH(1)-TARCH(1)-GARCH(1)	pogojna sredina		pogojna varianca					
	const.	L1.ma	const.	L1.arch	L1.tarch	L1.garch		
ML	-0,42 (0,10)	0,31 (0,06)	0,13 (0,05)	0,51 (0,12)	-0,54 (0,12)	0,75 (0,05)	normalna	
	-0,43 (0,15)	0,19 (0,06)	0,20 (0,07)	0,60 (0,13)	-0,60 (0,13)	0,68 (0,06)		
Bayes	MA(1)-ARCH(1)-TARCH(1)-GARCH(1)							
	pogojna sredina		pogojna varianca				Student t	
ML	const.	L1.ma	const.	L1.arch	L1.tarch	L1.garch		
	-0,43 (0,10)	0,31 (0,06)	0,12 (0,05)	0,51 (0,14)	-0,53 (0,14)	0,75 (0,06)		
Bayes	-0,46 (0,10)	0,36 (0,06)	0,17 (0,09)	0,56 (0,15)	-0,53 (0,14)	0,66 (0,10)		

Vir: Podatkovna baza Ljubljanske borze, 2009.

Vrednosti informacijskih kriterijev vseh modelov obeh cenilk so se izboljšale (glej Prilogo 11). Informacijski kriteriji soočijo prileganje modela podatkom in kompleksnost modela. Ker se kompleksnost modelov ni spremenila, sklepamo, da je izboljšanje vrednosti informacijskih kriterijev posledica boljšega prileganja podatkom (znotraj vzorčnega obdobja). Ko primerjamo učinkovitost napovedi modelov glede na porazdelitev ostankov, ugotovimo, da se je le-ta izboljšala pri obeh cenilkah (merjena z RMSE). Napoved modelov, ocenjenih z Bayesovsko cenilko, se je izboljšala v štirih izmed petih vzorcev in napoved modelov, ocenjenih z ML cenilko, v treh izmed petih vzorcev. Natančnost tvegane vrednosti je ostala približno enaka ne glede na uporabljeno cenilko (glej Prilogo 11).

Slika 9: Graf realizirane volatilnosti (e_2) in napovedi pogojne variance (h) najboljšega modela v zadnjem vzorcu, ostanki se porazdeljujejo v Studentovi t porazdelitvi, $MA(1)$ - $ARCH(1)$ - $TARCH(1)$ - $GARCH(1)$, ocenjen v obdobju 24. dec. 2007 – 29. avg. 2008, napovedi generirane za obdobje 05. jan. 2009 – 30. jan. 2009



Vir: Podatkovna baza Ljubljanske borze, 2009.

V predhodnih odstavkih smo primerjali ocene in napovedi glede na uporabljeno predpostavko o porazdelitvi ostankov, v tem odstavku primerjamo učinkovitost cenilk modelov. Spomnimo se, da tokrat tudi Bayesovske ocene parametrov temeljijo na simultani ocenitvi sredine in variance. V kolikor z RMSE medsebojno primerjamo izbrane najboljše modele z vidika uporabljenih cenilke, ugotovimo, da se je bolje izkazala Bayesovska cenilka. Na vzorčnih podatkih Bayesovska cenilka bolje napove vrednost pogojne variance v štirih izmed petih vzorcev. Izjema je zadnji, peti, vzorec in še v tem vzorcu je razlika med učinkovitostma cenilk minimalna, najmanjša izmed vseh vzorcev.

Tabela 10: Primerjava napovedi modelov obeh metod z ostanki, porazdeljenimi v Studentovi t porazdelitvi

VZOREC	BIC	DIC	MODEL	VaR MISS		RMSE		MME	
				Bayes	ML	Bayes	ML	Bayes	ML
1	555,1	534,5	ARCH(2)	13,6%	13,6%	11,30	11,57	4,55	4,60
2	646,7	620,1	ARCH(2) TARCH(2)	4,5%	4,5%	17,62	17,96	9,84	8,32
3	762,4	732,7	ARCH(1) TARCH(1) GARCH(1)	5,0%	0,0%	11,96	12,79	5,87	6,49
4	861,8	838,0	ARCH(1) TARCH(1) GARCH(1)	9,5%	0,0%	5,70	5,82	3,23	3,18
5	951,0	924,8	ARCH(1) TARCH(1) GARCH(1)	5,0%	5,0%	3,18	3,10	1,34	1,35

Vir: Podatkovna baza Ljubljanske borze, 2009.

Zdi se, da je simultano ocenjevanje močno izboljšalo učinkovitost Bayesovske cenilke. ML ocene najboljšega modela tretjega in četrtega vzorca so bile ob uporabi predpostavke o normalno porazdeljenih ostankih in dvostopenjskem pristopu k ocenjevanju, v primerjavi z Bayesovsko cenilko, natančnejše. Ko pa smo predpostavili Studentovo t porazdelitev in tudi Bayesovske koeficiente ocenili simultano, so se Bayesovske ocene izboljšale močneje kot ML ocene in jih v učinkovitosti presegle.

Sklep

V diplomski nalogi smo si zadali cilj modelirati in napovedati vrednost spremenljivke, katere prisotnost čutimo vsi in vendar je očem nevidna. V nasprotju z donosi indeksa SBI20 tveganja ne moremo opazovati. Kako torej izgraditi model spremenljivke, ko pa o njej nimamo

nikakršnih neposrednih podatkov? Iz finančne teorije vemo, da sta tveganje in donosnost dve plati istega kovanca. In v kolikor poznamo grb kovanca, vemo, katera številka se skriva na drugi strani. Podobno sklepanje uporabimo pri modeliranju tveganja, le da se tokrat ne nahajamo v determinističnem svetu kot v primeru kovanca, temveč v stohastičnem svetu, kjer ni gotovosti.

Naučili smo se, da je neviden stohastičen proces tveganja moč modelirati tako, da opazujemo posledice, ki jih pušča neposredno v svoji okolini. Namesto da bi modelirali tveganje neposredno, opazujemo njegove posledice, ki se v primeru donosov indeksa SBI20 izražajo v obliku odklonov dejanskih donosov od pričakovanih. Višje tveganje spremljajo višji odkloni donosov od pričakovanih in obratno, nižje je tveganje, manjši so odkloni. Omenjeno lastnost s pridom izkoriščajo modeli družine ARCH, s pomočjo katerih smo dosegli temeljni cilj diplomske naloge, to je modeliranje in napovedovanje tveganja.

Naučili smo se tudi, da so modeli družine ARCH poleg modeliranja tveganja sposobni zajeti tudi nekatere druge značilnosti finančnih časovnih vrst, t. i. stilizirana dejstva. Stilizirana dejstva, ki smo jih uspeli modelirati v tem diplomskem delu, so sledeča: skupinjenje tveganosti, leptokurtično porazdeljevanje donosov in učinek vzvoda.

Med delom smo preizkusili dva pristopa k modeliranju časovnih vrst, klasično metodo največjega verjetja ter novejšo Bayesovsko metodo. Teoretično se metodi razlikujeta v temeljnih predpostavkah o regresijskih parametrih in modelih. Klasična ekonometrija meni, da obstaja ena sama prava populacijska vrednost regresijskih parametrov in en sam pravi model generiranja podatkov. Bayesovska ekonometrična struja zastopa nasprotno stališče. Meni, da so tudi regresijski parametri slučajne spremenljivke, zato ne obstaja ena sama prava vrednost regresijskega parametra ali en sam pravi model. Obstajajo zgolj bolj ali manj verjetne ocene regresijskih parametrov in bolj ali manj verjetni modeli.

Bayesovska metoda temelji na skoraj 250 let stari ideji faktorizacije pogojne verjetnosti, ki nam omogoča neposredno sklepanje o regresijskih parametrih in modelih. Do nedavnega je Bayesovska ekonometrija veljala za »simpatičen, vendar neuporaben teoretičen koncept«, z razvojem informacijske tehnologije pa pridobiva na praktični vrednosti. Postopno uveljavljanje Bayesovske ekonometrije v praksi povzroča razkol v ekonometrični znanosti. V kolikor zanemarimo filozofske razprave o pravilnosti ene ali druge metode, ugotovimo, da je Bayesovska metoda praktično zelo uporabna in lahko bi rekli, da ponese ekonometrično analizo korak dlje od ferkventnostne metode. Med delom smo teoretično pokazali, zakaj pravimo, da z metodo največjega verjetja maksimiziramo verjetnost podatkov, medtem ko z Bayesovsko metodo maksimiziramo verjetnost regresijskih parametrov in modelov.

Da ne bi ostali zgolj pri teoretičnem razglabljanju, smo obe metodi preizkusili tudi v praksi in primerjali njuno učinkovitost. V prvem delu smo analizirali pet podvzorcev borznega indeksa SBI20, pri čemer je bil vsak vzorec od predhodnega večji za en mesec podatkov. V vsakem vzorcu smo s pomočjo metode največjega verjetja izbrali pet najboljših modelov tveganosti družine ARCH in jih nato ocenili še s pomočjo Bayesovske cenilke. V prvem delu ocenjeni modeli so bili izgrajeni pod predpostavko normalno porazdeljenih ostankov, obenem pa Bayesovske ocene v tem delu temeljijo na dvostopenjskem pristopu k ocenjevanju modelov. V drugem delu smo najboljši model vsakega vzorca ojačali s predpostavko o Studentovi t porazdelitvi ostankov. V tem delu smo tudi pri Bayesovski metodi uporabili simultani pristop k ocenjevanju sredine in variance, zato je primerjava učinkovitosti obeh cenilk morda bolj upravičena kot v prvem delu.

Primerjava cenilk v prvem delu je pokazala, da se Bayesovske predpostavke bolje skladajo z realnimi podatki kot pa predpostavke cenilke po metodi največjega verjetja. Omenjeno smo argumentirali z evolucijo modelov in regresijskih parametrov skozi pet podvzorcev, kar nam namiguje, da so tudi regresijski parametri in modeli slučajne spremenljivke, kot to predpostavlja Bayesovska ekonometrija. Omenili smo tudi nekatere zadržke, ki jih imamo ob postavljanju trditve.

Nadalje smo cenilki primerjali glede na natančnost napovedi tveganosti. Napovedi tveganosti smo ocenjevali z vidika simetričnih in asimetričnih mer natančnosti, pri končni primerjavi pa smo uporabili najpogosteje uporabljeni mero natančnosti modelov družine ARCH, to je RMSE. Ugotovili smo, da so bile napovedane vrednosti obeh cenilk podobne, kar smo utemeljili z uporabljeni priorno porazdelitvijo pri Bayesovski ceniki. Rezultati, dobljeni z Bayesovsko cenilko ob predpostavljeni neinformativni priorni porazdelitvi, teoretično vodijo do enakih rezultatov kot metoda največjega verjetja. Bayesovska cenilka deluje tako, da tehta moč podatkov in lastnih priornih prepričanj raziskovalca. Pri praktičnem delu smo predpostavili relativno neinformativna priorna prepričanja, kar pomeni, da se je v ocenah modelov izrazila predvsem moč podatkov. In ker metoda največjega verjetja maksimizira verjetnost podatkov, obenem pa so Bayesovske ocene prav tako temeljile predvsem na moči podatkov, so bile dobljene napovedi podobne.

Gornja trditev se nanaša predvsem na večje vzorce, kjer smo imeli veliko podatkov in ni bilo moč opaziti razlike v učinkovitosti obeh metod. V manjših vzorcih pa se je Bayesovska cenilka odrezala konsistentno bolje kot cenilka po metodi največjega verjetja. Priorne porazdelitve Bayesovske cenilke so bile sicer relativno neinformativne narave, kljub temu pa smo v njih uspeli vgraditi predpostavke o invertibilnosti in stacionarnosti modelov. V manjših vzorcih so se vgrajene predpostavke izkazale za učinkovite, saj so Gibbsov vzorčnik prisilile, da je raziskoval posteriorne vrednosti regresijskih parametrov na podprostoru možnih vrednosti parametrov, ki je skladen s predpostavkami o invertibilnosti in stacionarnosti modelov. Ob pomankanju podatkov je primerno oblikovana priorna porazdelitev postala konkurenčna prednost Bayesovske cenilke, v manjših vzorcih je bila le-ta natančnejša.

Ker je RMSE predvsem »tehnična« mera natančnosti napovedi, smo predstavili tudi praktično aplikacijo modelov ARCH, v obliki tvegane vrednosti. Tvegana vrednost nam odgovori na vprašanje, najmanj kolikšno izgubo lahko pričakujemo, v kolikor se jutri zgodi eden izmed α % najslabših tržnih premikov. Izračunali smo 5% kvantile tvegane vrednosti vseh modelov obeh metod ter ju/jih primerjali. Ugotovili smo, da tvegana vrednost v nekaterih vzorcih ne opravlja svoje vloge ravno najbolje. Primerjava tvegane vrednosti ocenjene z obema metodama se je izkazala za enako učinkovito. Obenem smo poudarili, da tvegana vrednost meri učinkovitost s popolnoma drugačnega vidika kot RMSE, v obliki števila dni v mesecu, ko je indeks SBI20 presegel tvegano vrednost. Ker so bili vzorci napovedi generirani za en mesec vnaprej, je bila tvegana vrednost netočna mera natančnosti.

Za konec smo v vsakem vzorcu po en izbrani model ocenili še s predpostavko, da se ostanki porazdeljujejo v Studentovi t porazdelitvi (drugi del). Ugotovili smo, da so se vrednosti ocenjenih regresijskih parametrov nekoliko sprememile. Večje spremembe vrednosti regresijskih parametrov smo opazili pri uporabi Bayesovske cenilke, kar je najverjetneje sprememba pristopa k ocenjevanju modelov. Kljub temu da naj bi oba pristopa vodila k enakim točkovnim ocenam, so se Bayesovske ocene sprememile bolj kot ML ocene.

Vrednosti informacijskih kriterijev vseh modelov obeh cenilk so se izboljšale, kar je posledica boljšega prileganja podatkom (znotraj vzorčnega obdobja). Izboljšale so se tudi zunajvzorčne napovedi (merjene z RMSE), pri čemer se je bolje izkazala Bayesovska cenilka. Ko smo tudi Bayesovske koeficiente ocenili simultano, so se Bayesovske ocene močno izboljšale in v učinkovitosti presegle ML ocene.

V diplomski nalogi smo obravnavali enostavne modele družine ARCH. Do nedavnega so le-ti predstavljeni skrajno mejo v finančni in ekonometrični znanosti. Vendar pa je to strokovno področje, ki doživlja bliskovit razvoj. Raziskovalci so že zarisali nove smernice razvoja modelov tveganja oz. volatilnosti, ki se nanašajo na področja, kot so »switching« modeli in modeli stohastične volatilnosti. Iskanje najučinkovitejšega modela se z modeli, obravnavanimi v diplomski nalogi, komaj prične.

Enako velja za ekonometrične metode, med katerimi smo predstavili tudi novejšo, Bayesovsko metodo. Temeljna slabost metode je njena računska intenzivnost. Z razvojem informacijske tehnologije bo le-ta najverjetneje kmalu obrobnega pomena. Bayesovska metoda je tu in velika škoda bi bila, da bi jo zanemarili zaradi filozofskih pogledov na delovanje abstraktnega sveta.

Literatura in viri

1. Abecednik. Najdeno 17. 3. 2009 na spletnem naslovu
<http://s.abecednik.com/stanovitnost.html>
2. Bagasheva, B.S., Fabozzi, F.J., Hsu, J.S.J., Rachev, S.T. (2008). *Bayesian Methods in Finance*. Hoboken New Jersey: John Wiley & Sons.
3. Balban, E. (2006). *Comparative Forecasting Performance Of Symmetric and Asymmetric Conditional Volatility Models Of an Exchange Rate*. Center for Financial Market Research, University of Edionburgh. Najdeno 26. 1. 2009 na spletnem naslovu
http://papers.ssrn.com/sol3/Delivery.cfm/SSRN_ID339521_code021031500.pdf?
4. Bera, A.K. & Higgins, M.L. (1992). *A Class of Nonlinear Arch Models*. International Economic Review. Najdeno 26. 1. 2009 na spletnem naslovu
<https://netfiles.uiuc.edu/abera/www/intecorev92.pdf>
5. Best, N.G., Carlin, B.P., van der Linde, A. & Spiegelhalter, D.J. (2002). *Bayesian Measures of Model Complexity and Fit*. Journal of the Royal Statistical Society: Series B (Statistical Methodology). Najdeno 28. 3. 2009 na spletnem naslovu <http://www.mrc-bsu.cam.ac.uk/bugs/winbugs/dicpage.shtml>
6. Bijak, J. (2006). Bayesian Model Averaging in Forecasting International Migration. European Population Conference, Session 904. Najdeno 5. 4. 2009 na spletnem naslovu
<http://epc2006.princeton.edu/download.aspx?submissionId=60094>
7. Bogdan, M., Ghosh, J.K., Doerge, R.W. (2004). *Modifying the Schwarz Bayesian Information Criterion to Locate Multiple Interacting Quantitative Trait Loci*. Genetics Society of America: Genetics. Najdeno 2. 3. 2009 na spletnem naslovu
<http://www.genetics.org/cgi/reprint/167/2/989.pdf>
8. Bollerslev, T. (2008). *Glossary to ARCH (GARCH)*. Najdeno 2. 12. 2008 na spletnem naslovu http://www.princeton.edu/~mwatson/ef/glossary_arch.pdf
9. Box, G.E.P. & Ljung, G.M. (1978). *On a Measure of Lack of Fit in Time Series Models*. Biometrika, 65 (2), 297-303.
10. Brockwell, P.J. (1996). *Introduction to time series and forecasting*. New York : Springer Verlag.
11. Brooks, C. (2008). *Introductory Econometrics for Finance (2. natis)*. Cambridge: Cambridge University Press.
12. The BUGS Project. Najdeno 11. 10. 2008 na spletnem naslovu
<http://www.mrc-bsu.cam.ac.uk/bugs/>
13. The BUGS Software Mailing List. Najdeno 11. 10. 2008 na spletnem naslovu
<https://www.jiscmail.ac.uk/cgi-bin/webadmin?A0=bugs>

14. Bulkley, G. & Harris, R.D.F. (1997). *Irrational Analysts' Expectations as a Cause of Excess Volatility in Stock Prices*. The Economic Journal. Najdeno 21. 9. 2008 na spletnem naslovu <http://www.jstor.org/pss/2957948>
15. Congdon, P. (2003). *Applied Bayesian Modeling*. West Sussex: John Wiley & Sons.
16. Congdon, P. (2006). *Bayesian Statistical Modeling (2. natis)*. West Sussex: John Wiley & Sons.
17. Dickey, F. & Fuller, W.A. (1979). *Distribution of Estimators for Autoregressive Time Series With a Unit Root*. Journal of the American Statistical Association, 74 (366), str. 427-431. b.k..
18. Enders, W. (1995). *Applied Econometric Time Series*. New York: John Wiley & Sons.
19. Engle, R.F. (1982). *Autoregressive Conditionall Hetereoscedasticity with Estimates of the Variance of U.K. Inflation*. Econometrica. Najdeno 21. 9. 2008 na spletnem naslovu <http://www.jstor.org/pss/1912773>
20. *European exchange report 2006*. Federation of European Securities Exchanges. Najdeno 13. 09. 2009 na spletnem naslovu <http://www.fese.be>
21. Fabozzi, F.J., Focardi, S.M., Jašić, T., Mittnik, S. & Rachev, S.T. (2007). *Financial Econometrics: from basics to advanced modeling techniques*. Hoboken New Jersey: John Wiley & Sons.
22. Fama, E.U.. (1970). *Efficient Capital Markets: A Review of Theory and Empirical Work*. The Journal of Finance. Najdeno 21. 9. 2008 na spletnem naslovu [http://stuwww.uvt.nl/fat/files/library/Fama,%20Eugene%20F.%20-%20Efficient%20Capital%20Markets,%20A%20Review%20of%20Theory%20and%20Empirical%20Work%20\(1970\).pdf](http://stuwww.uvt.nl/fat/files/library/Fama,%20Eugene%20F.%20-%20Efficient%20Capital%20Markets,%20A%20Review%20of%20Theory%20and%20Empirical%20Work%20(1970).pdf)
23. Geweke, J. (2003). *Contemporary Bayesian Econometrics and Statistics* (zapiski). Iowa: University of Iowa.
24. Gujarati, D.N. (2003). *Basic Econometrics*. (4. natis) Boston: McGraw Hill.
25. Koop, G. (2003). *Bayesian Econometrics*. West Sussex: John Wiley & Sons.
26. Ljubljanska borza d.d.. Najdeno 26. 08. 2009 na spletnem naslovu <http://www.ljse.si/>
27. McAleer, M. & Verhoeven, P. (2003). *Fat Tails and Asymmetry in Financial Volatility Models*. Center for International Research in Japanese Economy. Najdeno 17. 3. 2009 na spletnem naslovu <http://www.e.u-tokyo.ac.jp/cirje/research/dp/2003cf211.pdf>
28. McKinnon, J. (1991). *Critical Values of Cointegration Tests. Long-Run Economic Relationships: Readings in Cointegration*. New York : Oxford University Press.
29. Mehle, T. (2005). *Primernost modelov GARCH za ocenjevanje nestanovitnosti slovenskega kapitalskega trga*. Ljubljana: Ekonomski fakulteta.

30. Mills, T.C. (2002). *The Econometric Modelling of Financial Time Series* (2. natis). Cambridge: Cambridge University Press.
31. Mramor, D. (2000). *Teorija poslovnih financ* (1. natis). Ljubljana: Ekonomski fakulteta.
32. Nelson, D.B. (1991). *Conditional Heteroskedasticity in Asset Returns: A New Approach*. Econometrica. Najdeno 22. 4. 2009 na spletnem naslovu
<http://www.jstor.org/pss/2938260>
33. Pfajfar, L. (2004). *Statistika 1* (9. natis). Ljubljana: Ekonomski fakulteta.
34. STATA Listserver. Najdeno 26. 08. 2009 na spletnem naslovu
<http://www.stata.com/statalist/archive/>
35. Stock, J.H. & Watson, M.W. (2003). *Introduction to Econometrics* (1. natis). Boston: Addison-Wesley.
36. Tsay, R.S. (2002). *Analysis of Financial Time Series*. b.k.: John Wiley & Sons.
37. Van den Goorbergh, R. & Vlaar, P. (1999). *Value-at-Risk Analysis of Stock Returns Historical Simulation, Variance Techniques or Tail Index Estimation*. Najdeno 10. 11. 2008 na spletnem naslovu http://www.dnb.nl/binaries/sr040_tcm46-146818.pdf
38. Walsh, B. (2004). *Markov Chain Monte Carlo and Gibbs Sampling (Lecture Notes for EEB 581, version 26. April 2004)*. Najdeno 09. 1. 2009 na spletnem naslovu
<http://web.mit.edu/~wingated/www/introductions/mcmc-gibbs-intro.pdf>
39. White, H.L. (1982). *Maximum Likelihood of Misspecified Models*. Econometrica. Najdeno 5. 4. 2009 na spletnem naslovu
http://weber.ucsd.edu/~mbacci/white/pub_files/hwcv-010.pdf
40. Yilmazkuday, H. (b.l.). *Autoregressive Conditional Heteroskedasticity (ARCH) Model*. Nashville: Vanderbilt University of Tennessee. Najdeno 22. 1. 2009 na spletnem naslovu
http://people.vanderbilt.edu/~hakan.yilmazkuday/research_files/ARCH.pdf

Kazalo prilog

Priloga 1: Dokazila o nestacionarnosti osnovne časovne vrste	1
Priloga 2: Determinističen trend-ostanki regresije.....	2
Priloga 3: Preizkus uporabe stohastičnega trenda.....	3
Priloga 4: Kodi za simuliranje AR in MA modelov	5
Priloga 5: Določitev ARIMA odlogov	7
Priloga 6: : Analiza ostankov ARIMA modelov (A).....	9
Priloga 7: Analiza ostankov ARIMA modelov (B)	11
Priloga 8: Asimetrija, sploščenost in ARCH učinki ostankov.....	12
Priloga 9: Korelacije kvadratov ostankov ARIMA modelov	13
Priloga 10: Ocenjeni regresijski modeli	15
Priloga 11: Tabele parametrov primerjave modelov in metod.....	19
Priloga 12: Grafi realiziranih volatilnosti (e2) in napovedi pogojne variance (h) izbranih modelov.....	21
Priloga 13: Grafi tvegane vrednosti (VaR) in dejanskih donosov indeksa SBI20	26
Priloga 14: Winbugs koda za ARMA(1,1)-GARCH(1,1) model	31
Priloga 15: Avtokorelacija in avtokorelogram	32
Priloga 16: Q statistika.....	33
Priloga 17: Seznam uporabljenih kratic.....	34
Priloga 18: Terminološki slovarček.....	35

Priloga 1: Dokazila o nestacionarnosti osnovne časovne vrste

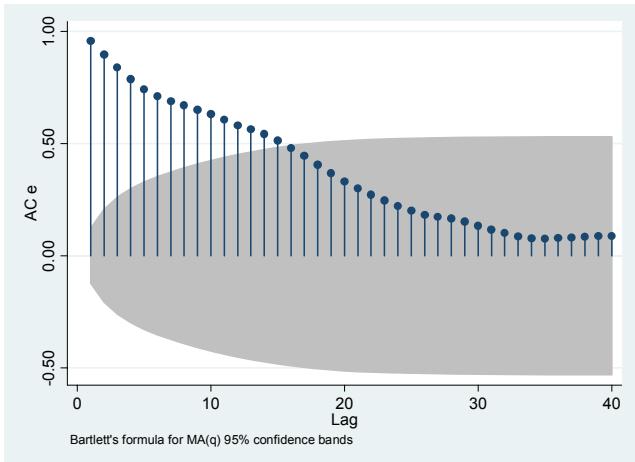
Tabela 1: Tabela avtokorelacijskih koeficientov, delnih avtokorelacijskih koeficientov, Q statistike in pripadajoče točne stopnje značilnosti borznega indeksa SBI20, 24. dec 2007 – 31. dec 2008

Odlog	AC	PAC	Q	Točna stopnja značilnosti
1	0.983	0.9976	247.39	0.000
2	0.9649	-0.2258	486.69	0.000
3	0.9466	0.102	717.92	0.000
4	0.9282	0.0514	941.16	0.000
5	0.9096	0.0573	1156.4	0.000
6	0.8931	0.145	1364.7	0.000
7	0.8783	0.0322	1567	0.000
8	0.8637	0.0816	1763.5	0.000
9	0.8487	-0.0388	1953.9	0.000
10	0.8332	0.0706	2138.2	0.000
11	0.8173	-0.0484	2316.3	0.000
12	0.8014	0.034	2488.2	0.000
13	0.787	0.1063	2654.7	0.000
14	0.7725	-0.0873	2815.8	0.000
15	0.7579	-0.0886	2971.5	0.000
16	0.7445	-0.0674	3122.4	0.000
17	0.7326	-0.0324	3269.1	0.000
18	0.7187	-0.0125	3410.9	0.000
19	0.704	0.0212	3547.5	0.000
20	0.6882	-0.0262	3678.6	0.000

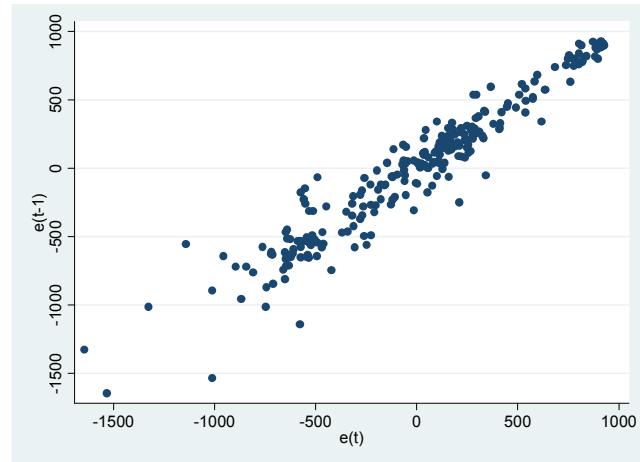
Vir: Podatkovna baza Ljubljanske borze, 2009.

Priloga 2: Determinističen trend - ostanki regresije

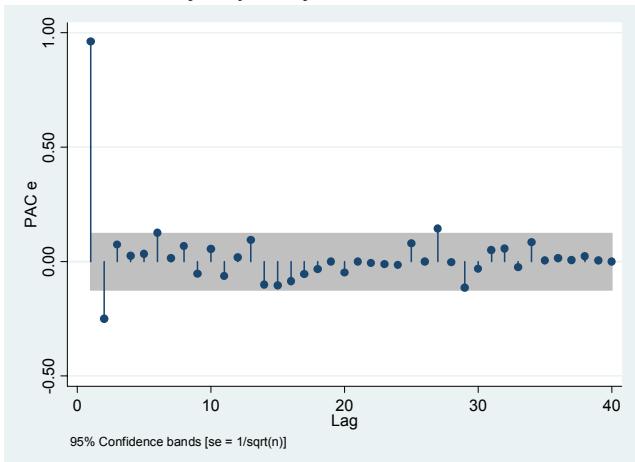
Slika 1: Avtokorelacijska funkcija ostankov, 24. dec 2007 – 31. dec 2008



Slika 3: Razsevni grafikon ostankov, 24. dec 2007 – 31. dec 2008



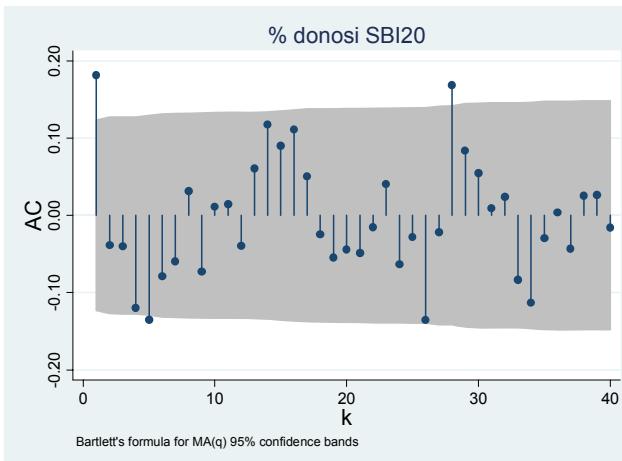
Slika 2: Delna avtokorelacijska funkcija ostankov, 24. dec 2007 – 31. dec 2008



Vir vseh slik: Podatkovna baza Ljubljanske borze, 2009.

Priloga 3: Preizkus uporabe stohastičnega trenda

Slika 1: Avtokorelacijska funkcija odstotnih donosov indeksa SBI20, 24. dec 2007 – 31. dec 2008



Slika 2: Delna avtokorelacijska funkcija odstotnih donosov indeksa SBI20, 24. dec 2007 – 31. dec

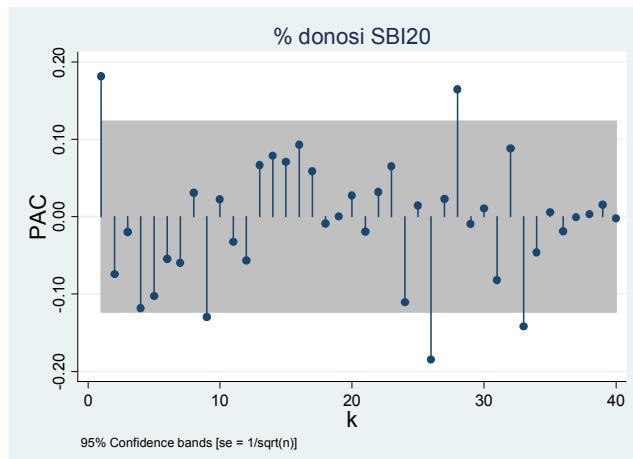


Tabela 1: Tabela avtokorelacijskih koeficientov, delnih avtokorelacijskih koeficientov, Q statistike in pripadajoče točne stopnje značilnosti odstotnih donosov borznega indeksa SBI20, 24. dec 2007 – 31. dec 2008

Odlog	AC	PAC	Q	Točne stopnje značilnosti
1	0,1814	0,1815	8,4279	0,0037
2	-0,0388	-0,0742	8,814	0,0122
3	-0,0399	-0,02	9,2256	0,0264
4	-0,1197	-0,1181	12,938	0,0116
5	-0,1351	-0,1028	17,689	0,0034
6	-0,0791	-0,0544	19,323	0,0037
7	-0,0595	-0,0597	20,25	0,0051
8	0,0314	0,031	20,509	0,0086
9	-0,073	-0,1295	21,918	0,0091
10	0,0109	0,0227	21,95	0,0154
11	0,0144	-0,0326	22,005	0,0243
12	-0,0394	-0,0567	22,422	0,0331
13	0,0609	0,067	23,417	0,0369
14	0,1173	0,0788	27,132	0,0185
15	0,0901	0,0707	29,332	0,0146
16	0,1108	0,0932	32,673	0,0082
17	0,0504	0,0588	33,368	0,0101
18	-0,0248	-0,0087	33,537	0,0144
19	-0,0547	-0,0001	34,363	0,0166
20	-0,0441	0,0275	34,901	0,0206

Vir slik in tabele: Podatkovna baza Ljubljanske borze, 2009.

Izpisek 1: Dickey-Fuller test enostavnega naključnega hoda:

a) S trendom:

Dickey-Fuller test for unit root				Number of obs	=	252
Test Statistic	Interpolated Dickey-Fuller					
	1% Critical Value	5% Critical Value	10% Critical Value			
Z(t)	-13.159	-3.460	-2.880			-2.570

MacKinnon approximate p-value for Z(t) = 0.0000

D. y	Coef.	Std. Err.	t	P> t	[95% Conf. Interval]
y	-.818452	.0621965	-13.16	0.000	-.9409478
L1._cons	-.3477022	.1317259	-2.64	0.009	-.6071362

b) Brez trenda:

Dickey-Fuller test for unit root				Number of obs	=	252
Test Statistic	Interpolated Dickey-Fuller					
	1% Critical Value	5% Critical Value	10% Critical Value			
Z(t)	-12.741	-2.580	-1.950			-1.620

D. y	Coef.	Std. Err.	t	P> t	[95% Conf. Interval]
y	-.7849356	.0616061	-12.74	0.000	-.9062663
L1.					-.6636049

Vir: Podatkovna baza Ljubljanske borze, 2009.

Priloga 4: Kodi za simuliranje AR in MA modelov

a) Koda za generiranje podatkov AR(1) modela, programski paket Stata

```
*simulacija AR(1)
*Št. opazovanj = 10.000
set obs 10000
*ustvari lokalni konstanti za 5.000 »izgorelih vrednosti«, 5.000 simuliranih vrednosti
local burn 5000
local keep 5000
*ustvari normalno porazdeljene i.i.d. slučajne napake
generate double normResid = invnorm(uniform())
*ustvari časovni indeks poimenovan »time«
generate double time = _n - `burn'
*časovni indeks označi za spremenljivko časa
tset time
*ustvari vektor avtoregresijskih členov, avtoregresijski koeficient prvega odloga  $\rho=0,5$ , 1 je koeficient za
množenje slučajnih napak
matrix b_ar = 0.5, 1
*izpiše shranjene vrednosti avtoregresijskih členov
matrix list b_ar
*poimenuje člene v matriki
matrix colnames b_ar = L.y normResid
*ponovno izpiše člene v matriki
matrix list b_ar
*ustvari lokalni vektor ki je enak številu avtoregresijskih členov
local k = cols(b_ar)
*izpiše lokalni vektor
macro list _k
*lokalni vektor poveča za 1
local kp1 = `k'+1
*ponovno izpiše lokalni vektor
macro list _kp1
*ustvari prvi dve opazovanji avtoregresijskega modela ki sta enaki prvima dvema slučajna napakama
generate double y = normResid in 1/k'
*ustvari časovno vrsto AR(1) modela brez konsante, tako da zaporedno množi  $0.5*y(t-1)+1*normResid$  oz.
[y]*[b_ar]
matrix score y = b_ar in `kp1'`l, replace
*zadrži zadnjih 5.000 opazovanje, torej t=[1,5000]
keep in -5000/l
*definira konstanto,  $\alpha=0.5$ 
matrix b0 = .5
*poimenuje člen s konstanto v matriki
matrix colnames b0 = _cons
*izpiše matriko
matrix list b0
*ustvari časovno vrsto konstant
matrix score double xb = b0
*ustvari AR(1) s konstanto
replace y = y + xb
*testi
ac y
pac y
arima y, arima(1,0,0) noconstant
```

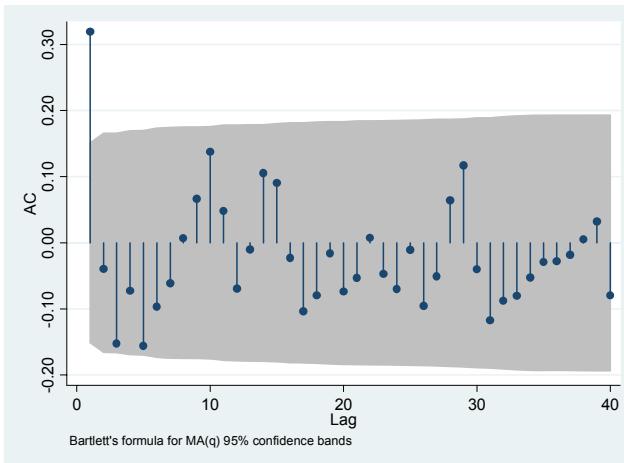
b) Koda za generiranje podatkov MA(1) modela, programski paket Stata

```
*simulacija podatkov MA(1)
*nastavi število opazovanj na 10.000
set obs 10000
*ustvari lokalni konstanti za 5.000 »izgorelih vrednosti«, 5.000 simuliranih vrednosti
local burn 5000
local keep 5000
*ustvari normalno porazdeljene i.i.d. slučajne napake
generate double normResid = invnorm(uniform())
*ustvari časovni indeks poimenovan »time«
generate double time = _n - `burn'
*časovni indeks označi za spremenljivko časa
tset time
*ustvari vektor členov premikajočega povprečja, MA člen prvega odloga  $\theta=0,5$ , 1 je koeficient za množenje
slučajnih napak
matrix b_ma = 0.5, 1
*izpiše vektor
matrix list b_ma
*poimenuje člene vektorja
matrix colnames b_ma = L.normRes normRes
*ponovno izpiše vektor
matrix list b_ma
*ustvari začasno časovno vrsto ostankov
gen y=normRes
*časovno vrsto ostankov pomnoži z vektorjem MA členov
matrix score y = b_ma , replace
*obdrži zadnjih 5000 opazovanj
keep in -5000/l
*ustvari matriko s konstanto
matrix b0 = .5
*poimenuje konstantni člen v matriki
matrix colnames b0 = _cons
*izpiše matriko
matrix list b0
*ustvari matriko konstantnih vrednosti
matrix score double xb = b0
*ustvari časovno vrsto premikajočega povprečja s konstanto
replace y = y + xb
*testi
ac y
pac y
arima y, arima(0,0,1)
```

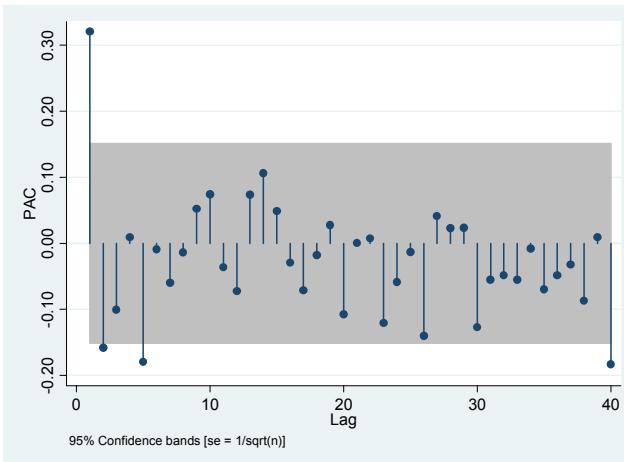
Vir: Arhiv STATA in lastna elaboracija.

Priloga 5: Določitev ARIMA odlogov

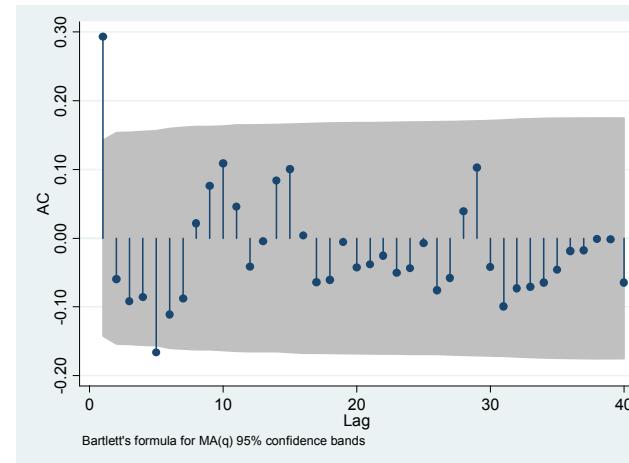
Slika 1: Avtokorelacijska funkcija odstotnih donosov indeksa SBI20, 24. dec 2007 – 29. aug. 2008



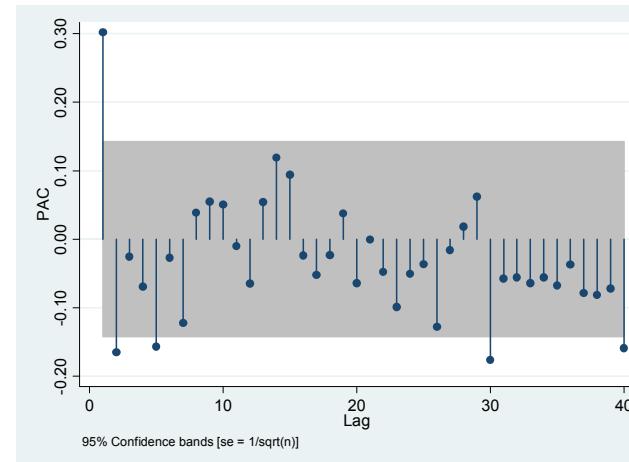
Slika 2: Delna avtokorelacijska funkcija odstotnih donosov indeksa SBI20, 24. dec 2007 – 29. aug. 2008



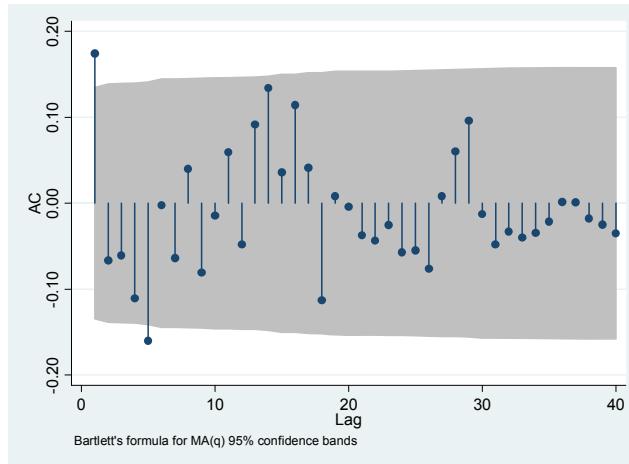
Slika 3: Avtokorelacijska funkcija odstotnih donosov indeksa SBI20, 24. dec 2007 – 30. sept. 2008



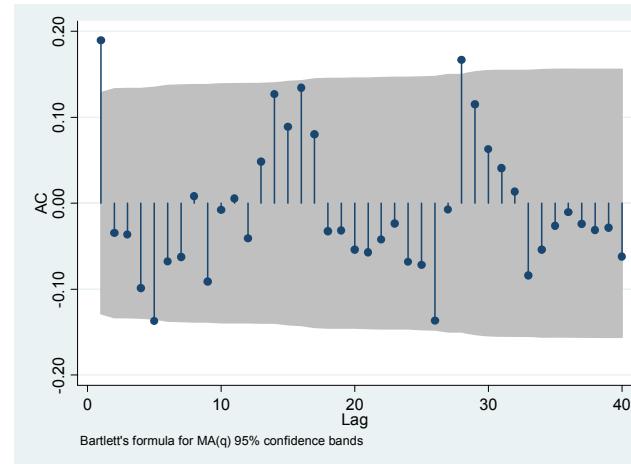
Slika 4: Delna avtokorelacijska funkcija odstotnih donosov indeksa SBI20, 24. dec 2007 – 30. sept. 2008



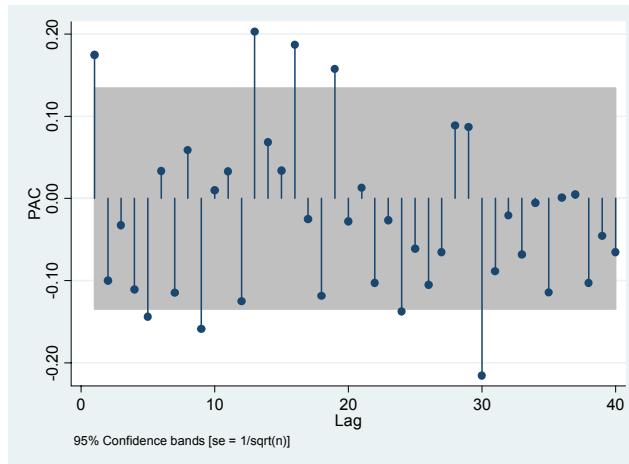
Slika 5: Avtokorelacijska funkcija odstotnih donosov indeksa SBI20, 24. dec 2007 – 30. oct. 2008



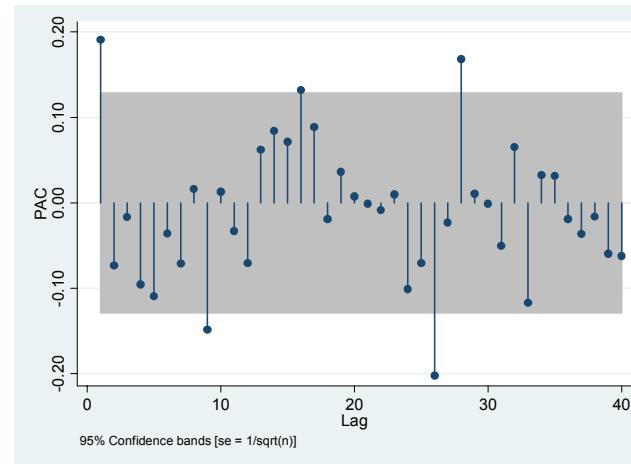
Slika 7: Avtokorelacijska funkcija odstotnih donosov indeksa SBI20, 24. dec 2007 – 28. nov. 2008



Slika 6: Delna avtokorelacijska funkcija odstotnih donosov indeksa SBI20, 24. dec 2007 – 30. oct. 2008



Slika 8: Delna avtokorelacijska funkcija odstotnih donosov indeksa SBI20, 24. dec 2007 – 28. nov. 2008



Vir vseh slik: Podatkovna baza Ljubljanske borze, 2009

Priloga 6: : Analiza ostankov ARIMA modelov (a)

Tabela 1: Preverba hipoteze pričakovane vrednosti ostankov ($H_0: E(et)=0$)

Vzorec	Model	t statistika	Točna stopnja značilnosti
1	MA(1)	-1,703	0,091
2	MA(1) s konstanto	0,009	0,993
3	MA(1) s konstanto	0,005	0,996
4	MA(1) s konstanto	0,004	0,997
5	MA(1) s konstanto	0,003	0,998

* V prvem vzorcu pri 5% stopnji značilnosti skoraj zavrnemo ničelno hipotezo ki pravi da so ostanki enaki nič. Kljub temu se odločimo za model brez konstante, saj je v primeru da jo vključimo v model izrazito statistično neznačilna.

Tabela 2: Tabela avtokorelacijskih koeficientov, delnih avtokorelacijskih koeficientov, Q statistike in pripadajoče točne stopnje značilnosti ostankov modela MA(1),
24. dec 2007 – 29. avg. 2008

Odlog	AC	PAC	Q	Točna stopnja značilnosti
1	0,013	0,013	0,029	0,865
2	0,006	0,006	0,036	0,982
3	-0,163	-0,164	4,629	0,201
4	0,024	0,029	4,726	0,317
5	-0,154	-0,157	8,858	0,115
6	-0,032	-0,055	9,037	0,172
7	-0,057	-0,051	9,612	0,212
8	0,015	-0,040	9,651	0,290
9	0,025	0,019	9,764	0,370
10	0,120	0,086	12,366	0,261

Tabela 3: Tabela avtokorelacijskih koeficientov, delnih avtokorelacijskih koeficientov, Q statistike in pripadajoče točne stopnje značilnosti ostankov modela MA(1),
24. dec 2007 – 30. sept. 2008

Odlog	AC	PAC	Q	Točna stopnja značilnosti
1	-0,005	-0,005	0,006	0,937
2	-0,030	-0,030	0,217	0,897
3	-0,016	-0,017	0,278	0,964
4	-0,072	-0,074	1,497	0,827
5	-0,115	-0,120	4,664	0,458
6	-0,030	-0,042	4,884	0,559
7	-0,068	-0,085	5,984	0,542
8	0,041	0,031	6,395	0,603
9	-0,103	-0,141	8,963	0,441
10	0,009	-0,015	8,981	0,534

Tabela 4: Tabela avtokorelacijskih koeficientov, delnih avtokorelacijskih koeficientov, Q statistike in pripadajoče točne stopnje značilnosti ostankov modela MA(1), dec 2007 – 30. oct. 2008

Odlog	AC	PAC	Q	Točna stopnja značilnosti
1	0,000	0,000	0,000	1,000
2	-0,034	-0,036	0,230	0,891
3	-0,074	-0,076	1,284	0,733
4	-0,017	-0,020	1,339	0,855
5	-0,153	-0,166	5,977	0,308
6	-0,029	-0,041	6,148	0,407
7	-0,095	-0,124	7,949	0,337
8	0,020	-0,019	8,025	0,431
9	0,051	0,048	8,544	0,480
10	0,088	0,060	10,110	0,431

Tabela 5: Tabela avtokorelacijskih koeficientov, delnih avtokorelacijskih koeficientov, Q statistike in pripadajoče točne stopnje značilnosti ostankov modela MA(1), 24. dec 2007 – 28. nov. 2008

Odlog	AC	PAC	Q	Točna stopnja značilnosti
1	-0,006	-0,006	0,010	0,920
2	-0,035	-0,035	0,316	0,854
3	-0,015	-0,015	0,370	0,946
4	-0,096	-0,100	2,731	0,604
5	-0,108	-0,114	5,742	0,332
6	-0,046	-0,059	6,299	0,391
7	-0,062	-0,080	7,313	0,397
8	0,061	0,044	8,278	0,407
9	-0,089	-0,123	10,385	0,320
10	0,024	-0,001	10,541	0,394

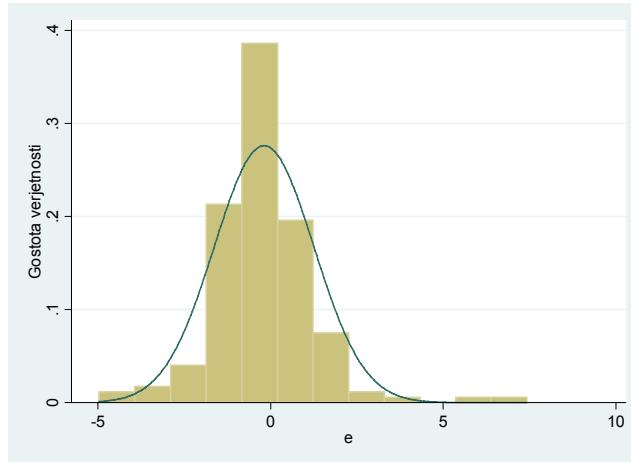
Tabela 6: Tabela avtokorelacijskih koeficientov, delnih avtokorelacijskih koeficientov, Q statistike in pripadajoče točne stopnje značilnosti ostankov modela MA(1), 24. dec 2007 – 31. dec. 2008

Odlog	AC	PAC	Q	Točna stopnja značilnosti
1	-0,010	-0,010	0,020	0,887
2	-0,057	-0,057	0,721	0,697
3	-0,035	-0,037	0,981	0,806
4	-0,075	-0,082	2,211	0,697
5	-0,154	-0,171	7,415	0,192
6	0,044	0,028	7,836	0,250
7	-0,087	-0,121	9,520	0,217
8	0,075	0,064	10,766	0,215
9	-0,093	-0,140	12,696	0,177
10	-0,011	-0,035	12,716	0,240

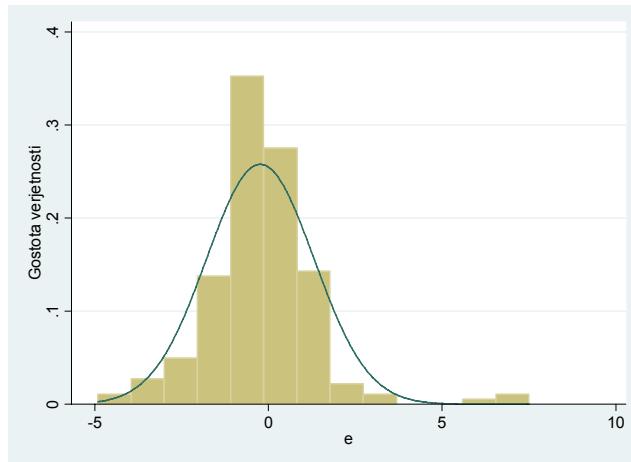
Vir vseh tabel: Podatkovna baza Ljubljanske borze, 2009.

Priloga 7: Analiza ostankov ARIMA modelov (b)

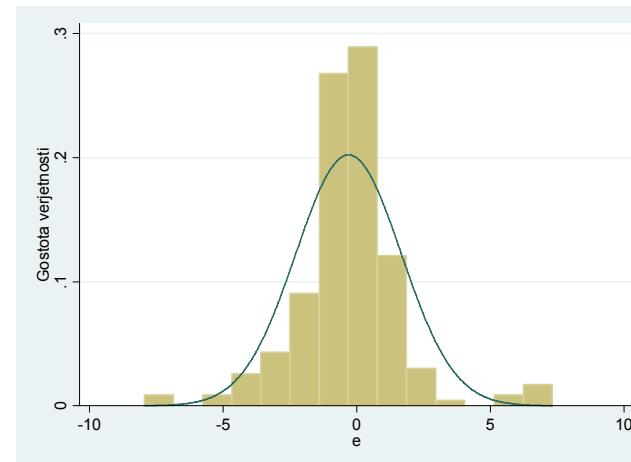
Slika 1: Histogram ostankov modela MA(1) s konstanto, 24. dec 2007 – 29. avg. 2008



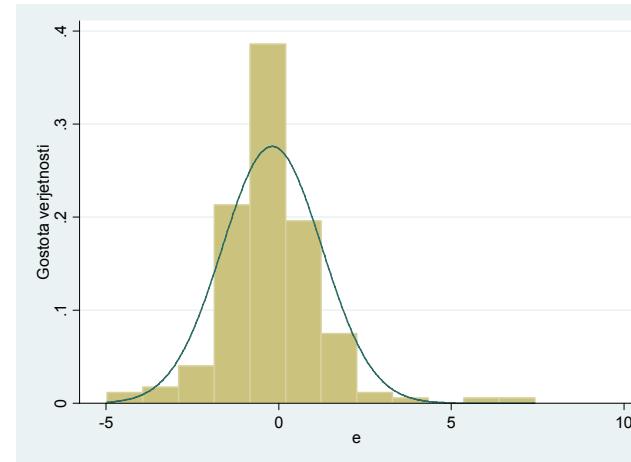
Slika 2: Histogram ostankov modela MA(1) s konstanto, 24. dec 2007 – 30. sept. 2008



Slika 3: Histogram ostankov modela MA(1) s konstanto, 24. dec 2007 – 30. oct. 2008



Slika 4: Histogram ostankov modela MA(1) s konstanto, 24. dec 2007 – 28. nov. 2008



Vir vseh slik: Podatkovna baza Ljubljanske borze, 2009.

Priloga 8: Asimetrija, sploščenost in ARCH učinki ostankov

Tabela 1: Koeficienti ukrivljenosti in sploščenosti ostankov modelov, ter Jarque-Berra test

Vzorec	Model	Ukrivljenost (λ_1)	Sploščenost (λ_2)	$\chi^2(2)$	$P(\chi^2 > \chi^2_c)$
1	MA(1)	0.87	9.21	36.89	0.000
2	MA(1) s konstanto	1.1	9.27	46.92	0.000
3	MA(1) s konstanto	0.41	7.29	26.28	0.000
4	MA(1) s konstanto	0.2	6.73	22.39	0.000
5	MA(1) s konstanto	0.18	6.42	22.21	0.000

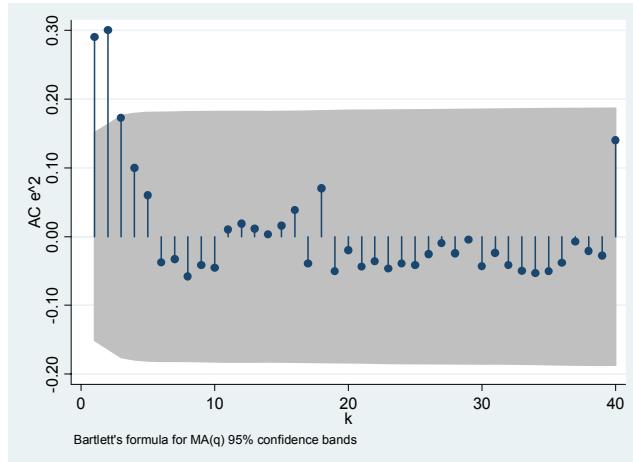
Tabela 2: Testi Lagrangevega multiplikatorja

Vzorec	Model	LM	$P(LM > LM_c)$
1	MA(1)	14.08	0.000
2	MA(1) s konstanto	9.62	0.002
3	MA(1) s konstanto	79.93	0.000
4	MA(1) s konstanto	71.79	0.000
5	MA(1) s konstanto	73.56	0.000

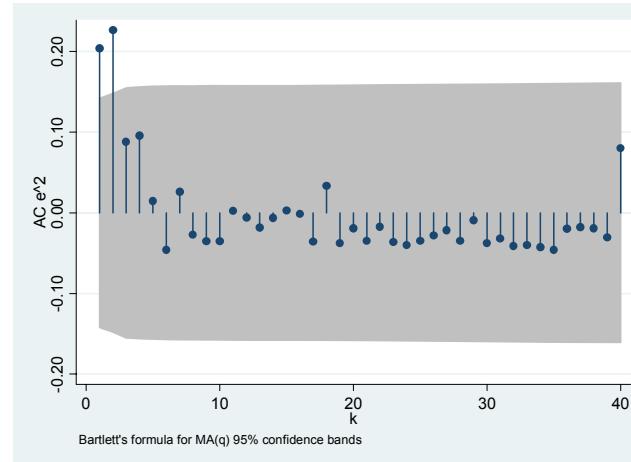
Vir vseh tabel: Podatkovna baza Ljubljanske borze, 2009.

Priloga 9: Korelacijske kvadratne ostankov modelov

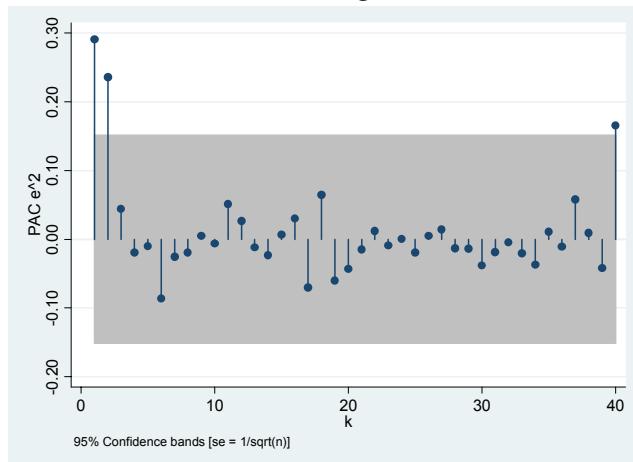
Slika 1: Avtokorelacijska funkcija kvadratov ostankov modela MA(1), 24. dec 2007 – 29. avg. 2008



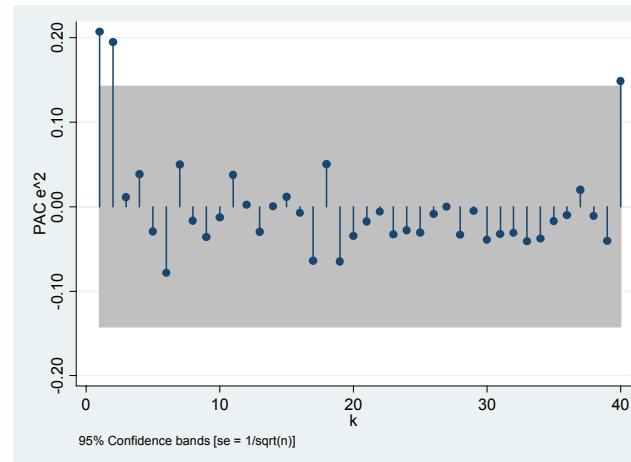
Slika 3: Avtokorelacijska funkcija kvadratov ostankov modela MA(1) s konstantom, 24. dec 2007 – 30. sept. 2008



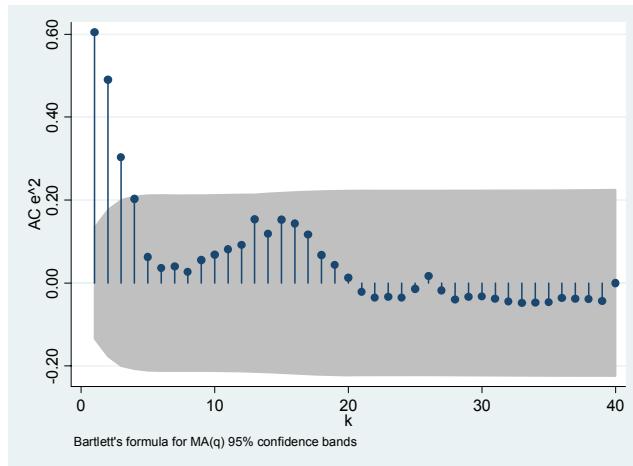
Slika 2: Delna avtokorelacijska funkcija kvadratov ostankov modela MA(1), 24. dec 2007 – 29. avg. 2008



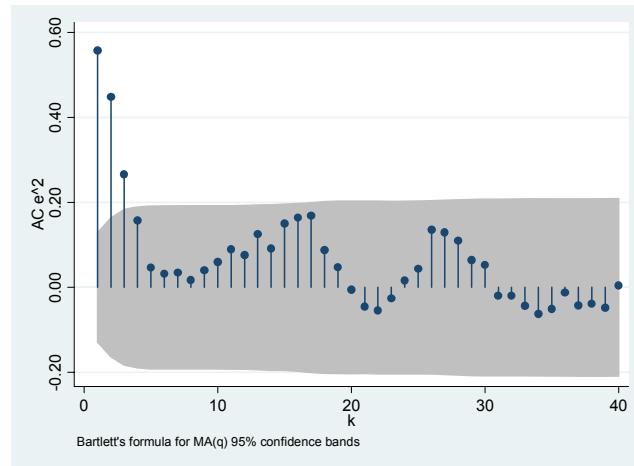
Slika 4: Delna avtokorelacijska funkcija kvadratov ostankov modela MA(1) s konstantom, 24. dec 2007 – 30. sept. 2008



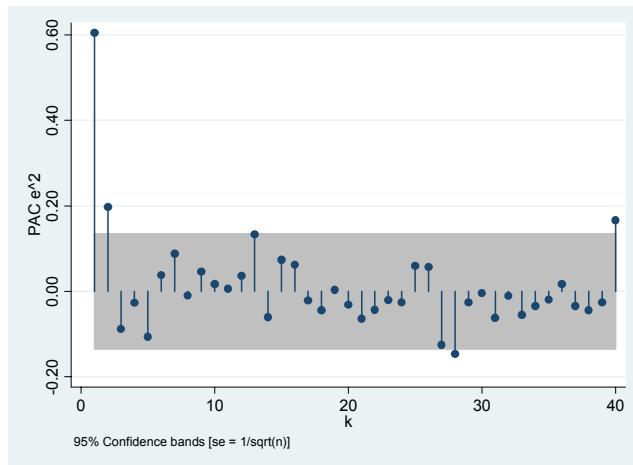
Slika 5: Avtokorelacijska funkcija kvadratov ostankov modela MA(1) s konstanto, 24. dec 2007 – 30. oct. 2008



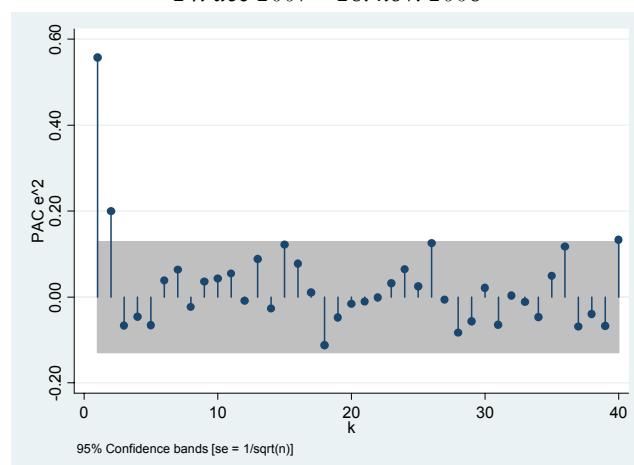
Slika 7: Avtokorelacijska funkcija kvadratov ostankov modela MA(1) s konstanto, 24. dec 2007 – 28. nov. 2008



Slika 6: Delna avtokorelacijska funkcija kvadratov ostankov modela MA(1) s konstanto, 24. dec 2007 – 30. oct. 2008



Slika 8: Delna avtokorelacijska funkcija kvadratov ostankov modela MA(1) s konstanto, 24. dec 2007 – 28. nov. 2008



Vir vseh slik: Podatkovna baza Ljubljanske borze, 2009.

Priloga 10: Ocene regresijskih modelov

Posamezni členi regresijskega modela v tabelah so označeni z okrajšavami, enakimi kot so uporabljene v statističnem paketu Stata.

Okrajšava	Opis	Oznaka v nalogi	Str.
const.	konstantni člen	α	22
ma	člen premikajočega povprečja	$\theta_q e_{t-q}$	22
arch	ARCH člen	$a_i \varepsilon_{t-i}^2$	39
garch	GARCH člen	$b_i h_{t-i}$	43
tarch	pragovni ARCH člen	$c_i \varepsilon_{t-i}^2 I(\varepsilon_{t-i})$	46
abarch	absolutni ARCH člen	$d_i \varepsilon_{t-i} $	44
L1	prvi odlog	i,q=1	/
L2	drugi odlog	i,q=2	/

VZOREC 1						
1 ARCH(2)	pogojna sredina		pogojna varianca			
	const.	L1.ma	const.	L1.arch	L2.arch	
ML		0,42 (0,08)	0,67 (0,11)	0,39 (0,14)	0,27 (0,13)	
		0,33 (0,07)	0,69 (0,13)	0,43 (0,16)	0,31 (0,12)	
2 ARCH(2) TARCH(1)	pogojna sredina		pogojna varianca			
	const.	L1.ma	const.	L1.arch	L2.arch	L1.tarch
ML		0,41 (0,08)	0,61 (0,11)	0,62 (0,21)	0,31 (0,12)	-0,47 (0,22)
		0,33 (0,07)	0,65 (0,13)	0,65 (0,19)	0,32 (0,12)	-0,45 (0,21)
3 ABARCH(2)	pogojna sredina		pogojna varianca			
	const.	L1.ma	const.	L1.abarch	L2.abarch	
ML		0,38 (0,08)	0,66 (0,06)	0,37 (0,08)	0,26 (0,09)	
		0,33 (0,07)	0,40 (0,15)	0,78 (0,15)	0,64 (0,18)	
4 ABARCH(1)	pogojna sredina		pogojna varianca			
	const.	L1.ma	const.	L1.abarch		
ML		0,43 (0,03)	0,49 (0,07)	0,86 (0,08)		
		0,33 (0,07)	0,86 (0,09)	0,88 (0,09)		
5 ARCH(1)	pogojna sredina		pogojna varianca			
	const.	L1.ma	const.	L1.arch		
ML		0,45 (0,04)	1,00 (0,14)	0,58 (0,16)		
		0,33 (0,07)	0,90 (0,07)	0,66 (0,15)		

VZOREC 2

1 ARCH(2) TARCH(1)		pogojna sredina const. L1.ma	pogojna varianca				
		const.	L1.arch	L2.arch	L1.tarch		
ML		0,36 (0,08)	0,60 (0,11)	0,82 (0,22)	0,35 (0,12)	-0,71 (0,21)	
	Bayes	0,35 (0,07)	0,65 (0,13)	0,74 (0,17)	0,38 (0,13)	-0,57 (0,19)	
2 ARCH(2) TARCH(2)		pogojna sredina const. L1.ma	pogojna varianca				
		const.	L1.arch	L2.arch	L1.tarch	L2.tarch	
ML		0,49 (0,04)	0,66 (0,12)	0,48 (0,18)	0,83 (0,21)	-0,50 (0,18)	-0,68 (0,24)
	Bayes	0,35 (0,07)	0,66 (0,13)	0,67 (0,19)	0,58 (0,18)	-0,52 (0,20)	-0,35 (0,19)
3 ARCH(2)		pogojna sredina const. L1.ma	pogojna varianca				
		const.	L1.arch	L2.arch			
ML		0,40 (0,08)	0,68 (0,11)	0,42 (0,14)	0,39 (0,15)		
	Bayes	0,35 (0,07)	0,69 (0,13)	0,49 (0,17)	0,41 (0,15)		
4 ABARCH(2)		pogojna sredina const. L1.ma	pogojna varianca				
		const.	L1.abarch	L2.abarch			
ML		0,36 (0,08)	0,64 (0,06)	0,40 (0,08)	0,32 (0,09)		
	Bayes	0,35 (0,07)	0,38 (0,15)	0,82 (0,13)	0,75 (0,15)		
5 ARCH(1) GARCH(1)		pogojna sredina const. L1.ma	pogojna varianca				
		const.	L1.arch	L1.garch			
ML		0,38 (0,07)	0,33 (0,12)	0,47 (0,11)	0,45 (0,09)		
	Bayes	0,35 (0,07)	0,43 (0,16)	0,57 (0,16)	0,36 (0,12)		

VZOREC 3

1 ARCH(1) TARCH(1) GARCH(1)		pogojna sredina const. L1.ma	pogojna varianca					
		const.	L1.arch	L1.tarch	L1.garch			
ML		-0,40 (0,10)	0,35 (0,06)	0,14 (0,07)	0,60 (0,16)	-0,62 (0,15)	0,71 (0,08)	
	Bayes	-0,37 (0,16)	0,19 (0,07)	0,32 (0,14)	0,76 (0,15)	-0,68 (0,14)	0,51 (0,13)	
2 ARCH(2) TARCH(2)		pogojna sredina const. L1.ma	pogojna varianca					
		const.	L1.arch	L2.arch	L1.tarch	L2.tarch		
ML		-0,41 (0,11)	0,32 (0,07)	0,75 (0,11)	0,85 (0,33)	0,70 (0,25)	-0,81 (0,33)	-0,60 (0,27)
	Bayes	-0,37 (0,16)	0,19 (0,07)	0,93 (0,06)	0,17 (0,07)	0,11 (0,07)	-0,16 (0,07)	-0,10 (0,07)
3 ARCH(2) TARCH(1)		pogojna sredina const. L1.ma	pogojna varianca					
		const.	L1.arch	L2.arch	L1.tarch			
ML		-0,28 (0,10)	0,25 (0,06)	0,67 (0,12)	1,11 (0,36)	0,29 (0,09)	-1,05 (0,35)	
	Bayes	-0,37 (0,16)	0,19 (0,07)	0,74 (0,12)	0,84 (0,12)	0,33 (0,11)	-0,73 (0,15)	
4 ABARCH(2)		pogojna sredina const. L1.ma	pogojna varianca					
		const.	L1.abarch	L2.abarch				
ML		-0,23 (0,07)	0,23 (0,08)	0,59 (0,08)	0,52 (0,11)	0,29 (0,10)		
	Bayes	-0,37 (0,16)	0,19 (0,07)	0,30 (0,14)	0,93 (0,07)	0,85 (0,12)		
5 ARCH(2)		pogojna sredina const. L1.ma	pogojna varianca					
		const.	L1.arch	L2.arch				
ML		-0,22 (0,10)	0,29 (0,08)	0,72 (0,11)	0,62 (0,17)	0,25 (0,13)		
	Bayes	-0,37 (0,16)	0,19 (0,07)	0,76 (0,12)	0,65 (0,15)	0,27 (0,12)		

VZOREC 4

1 ARCH(1) TARCH(1) GARCH(1)		pogojna sredina		pogojna varianca			
		const.	L1.ma	const.	L1.arch	L1.tarch	L1.garch
ML	-0,40 (0,10)	0,33 (0,06)	0,11 (0,05)	0,52 (0,13)	-0,55 (0,13)	0,75 (0,06)	
	-0,40 (0,16)	0,20 (0,07)	0,22 (0,1)	0,65 (0,15)	-0,62 (0,13)	0,64 (0,09)	
2 ARCH(2) TARCH(2)		pogojna sredina		pogojna varianca			
		const.	L1.ma	const.	L1.arch	L2.arch	L1.tarch
ML	-0,41 (0,12)	0,29 (0,08)	0,93 (0,11)	0,72 (0,28)	0,70 (0,26)	-0,62 (0,29)	-0,63 (0,27)
	-0,40 (0,16)	0,20 (0,07)	0,96 (0,04)	0,14 (0,05)	0,12 (0,07)	-0,12 (0,06)	-0,11 (0,07)
3 ARCH(2) TARCH(1)		pogojna sredina		pogojna varianca			
		const.	L1.ma	const.	L1.arch	L2.arch	L1.tarch
ML	-0,31 (0,12)	0,25 (0,07)	0,89 (0,10)	0,99 (0,31)	0,24 (0,09)		-0,84 (0,30)
	-0,40 (0,16)	0,20 (0,07)	0,86 (0,09)	0,84 (0,12)	0,29 (0,11)	-0,61 (0,17)	
4 ARCH(1) GARCH(1)		pogojna sredina		pogojna varianca			
		const.	L1.ma	const.	L1.arch	L1.garch	
ML	-0,22 (0,11)	0,31 (0,07)	0,26 (0,08)	0,47 (0,10)	0,52 (0,05)		
	-0,40 (0,16)	0,20 (0,07)	0,61 (0,20)	0,66 (0,15)	0,29 (0,13)		
5 ARCH(2)		pogojna sredina		pogojna varianca			
		const.	L1.ma	const.	L1.arch	L2.arch	
ML	-0,25 (0,11)	0,27 (0,08)	0,88 (0,11)	0,62 (0,18)	0,23 (0,12)		
	-0,40 (0,16)	0,20 (0,07)	0,84 (0,11)	0,68 (0,15)	0,27 (0,12)		

VZOREC 5

1 MA(1)-ARCH(1)-TARCH(1)-GARCH(1)		pogojna sredina		pogojna varianca			
		const.	L1.ma	const.	L1.arch	L1.tarch	L1.garch
ML	-0,42 (0,10)	0,31 (0,06)	0,13 (0,05)	0,51 (0,12)	-0,54 (0,12)	0,75 (0,05)	
	-0,43 (0,15)	0,19 (0,06)	0,20 (0,07)	0,60 (0,13)	-0,60 (0,13)	0,68 (0,06)	
2 MA(1)-ARCH(2)-TARCH(2)		pogojna sredina		pogojna varianca			
		const.	L1.ma	const.	L1.arch	L2.arch	L1.tarch
ML	-0,43 (0,12)	0,27 (0,08)	1,00 (0,11)	0,76 (0,28)	0,66 (0,23)	-0,69 (0,28)	-0,56 (0,25)
	-0,43 (0,15)	0,19 (0,06)	0,97 (0,03)	0,13 (0,05)	0,12 (0,06)	-0,12 (0,05)	-0,10 (0,06)
3 MA(1)-ARCH(2)-TARCH(1)		pogojna sredina		pogojna varianca			
		const.	L1.ma	const.	L1.arch	L2.arch	L1.tarch
ML	-0,34 (0,11)	0,22 (0,07)	0,95 (0,11)	0,94 (0,30)	0,29 (0,08)		-0,85 (0,29)
	-0,43 (0,15)	0,19 (0,06)	0,88 (0,09)	0,83 (0,12)	0,35 (0,11)	-0,67 (0,15)	
4 MA(1)-ARCH(1)-GARCH(1)		pogojna sredina		pogojna varianca			
		const.	L1.ma	const.	L1.arch	L1.garch	
ML	-0,25 (0,11)	0,29 (0,07)	0,24 (0,07)	0,43 (0,09)	0,57 (0,05)		
	-0,43 (0,15)	0,19 (0,06)	0,55 (0,21)	0,57 (0,14)	0,38 (0,13)		
5 MA(1)-ARCH(2)		pogojna sredina		pogojna varianca			
		const.	L1.ma	const.	L1.arch	L1.garch	
ML	-0,28 (0,11)	0,25 (0,08)	0,94 (0,11)	0,52 (0,15)	0,32 (0,11)		
	-0,43 (0,15)	0,19 (0,06)	0,86 (0,10)	0,59 (0,15)	0,36 (0,13)		

Modeli s Studentovo t porazdelitvijo ostankov							
VZOREC 1 MA(1)-ARCH(2)	pogojna sredina		pogojna varianca				
	const.	L1.ma	const.	L1.arch	L2.arch		
ML		0,39 (0,08)	0,64 (0,16)	0,33 (0,15)	0,38 (0,21)		
		0,37 (0,07)	0,51 (0,13)	0,29 (0,14)	0,30 (0,12)		
VZOREC 2 MA(1)-ARCH(2)-TARCH(2)	pogojna sredina		pogojna varianca				
	const.	L1.ma	const.	L1.arch	L2.arch	L1.tarch	L2.tarch
ML	-0,37 (0,10)	0,37 (0,07)	0,67 (0,17)	0,81 (0,32)	0,82 (0,37)	-0,57 (0,32)	-0,61 (0,40)
	-0,35 (0,10)	0,37 (0,09)	0,51 (0,13)	0,53 (0,21)	0,63 (0,20)	-0,46 (0,22)	-0,44 (0,21)
VZOREC 3 MA(1)-ARCH(1)-TARCH(1)-GARCH(1)	pogojna sredina		pogojna varianca				
	const.	L1.ma	const.	L1.arch	L2.tarch	L1.garch	
ML	-0,41 (0,10)	0,35 (0,07)	0,16 (0,08)	0,64 (0,20)	-0,64 (0,19)	0,67 (0,10)	
	-0,43 (0,11)	0,40 (0,40)	0,26 (0,11)	0,71 (0,16)	-0,64 (0,15)	0,50 (0,13)	
VZOREC 4 MA(1)-ARCH(1)-TARCH(1)-GARCH(1)	pogojna sredina		pogojna varianca				
	const.	L1.ma	const.	L1.arch	L2.tarch	L1.garch	
ML	-0,41 (0,10)	0,33 (0,07)	0,11 (0,05)	0,52 (0,14)	-0,54 (0,14)	0,75 (0,07)	
	-0,43 (0,11)	0,38 (0,06)	0,20 (0,11)	0,62 (0,17)	-0,56 (0,15)	0,58 (0,14)	
VZOREC 5 MA(1)-ARCH(1)-TARCH(1)-GARCH(1)	pogojna sredina		pogojna varianca				
	const.	L1.ma	const.	L1.arch	L2.tarch	L1.garch	
ML	-0,43 (0,10)	0,31 (0,06)	0,12 (0,05)	0,51 (0,14)	-0,53 (0,14)	0,75 (0,06)	
	-0,46 (0,10)	0,36 (0,06)	0,17 (0,09)	0,56 (0,15)	-0,53 (0,14)	0,66 (0,10)	

Vir vseh tabel: Podatkovna baza Ljubljanske borze, 2009.

Priloga 11: Tabele parametrov primerjave modelov in metod

a) Modeli s predpostavljenim normalno porazdelitvijo ostankov, Bayes ocene temeljijo na dvostopenjskem pristopu.

1. vzorec: 24. dec. 2007 - 29. avg. 2008 (n=168)

BIC RANG	BIC	DIC RANG	DIC	MODEL	VaR prekoračitev		RMSE		MME		Povp. % razl. med vr. ocen. reg. koef.	Povp. % razl. med vr. ocen. reg. koef.
					Bayes	ML	Bayes	ML	Bayes	ML		
1	557,8	1	548,1	ARCH(2) ARCH(2) TARCH(1) ABARCH(2) ABARCH(1) ARCH(1)	13,6%	13,6%	11,31	11,77	4,61	4,63	12%	13%
2	559,5	2	548,6		9,1%	13,6%	10,24	10,71	4,27	4,29	8%	9%
3	560,9	3	553,2		4,5%	13,6%	10,38	11,02	4,06	4,26	77%	48%
4	574,4	5	571,5		13,6%	36,4%	10,58	11,23	4,33	4,50	34%	26%
5	574,4	4	565,3		13,6%	18,2%	11,98	12,69	4,86	4,96	17%	20%

Napovedi pogojne variance: 01. sept. 2008 - 30. sept. 2008 (n f.=22)

2. vzorec: 24. dec. 2007 - 30. sept. 2008 (n=190)

BIC RANK	BIC	DIC RANK	DIC	MODEL	VaR MISS		RMSE		MME		Povp. % razl. med vr. ocen. reg. koef.	Povp. % razl. med vr. ocen. reg. koef.
					Bayes	ML	Bayes	ML	Bayes	ML		
1	649,5	1	624,2	ARCH(2) TARCH(2) ARCH(2) TARCH(1) ABARCH(2) ARCH(1) GARCH(1) ARCH(2)	4,5%	4,5%	15,05	16,38	8,29	8,84	9%	10%
2	650,7	2	637,3		4,5%	4,5%	15,28	14,81	7,92	8,01	25%	35%
3	654,5	4	641,9		0,0%	27,3%	22,81	23,48	13,18	14,03	8%	8%
4	659,2	5	654,5		0,0%	0,0%	17,05	18,70	9,56	10,69	71%	45%
5	670,0	3	639,2		0,0%	4,5%	17,84	18,58	10,05	10,53	21%	20%

Napovedi pogojne variance: 01. okt. 2008 - 30. okt. 2008 (n f.=22)

3. vzorec: 24. dec. 2007 - 30. oct. 2008 (n=212)

BIC RANG	BIC	DIC RANG	DIC	MODEL	VaR prekoračitev		RMSE		MME		Povp. % razl. med vr. ocen. reg. koef.	Povp. % razl. med vr. ocen. reg. koef.
					Bayes	ML	Bayes	ML	Bayes	ML		
1	758,6	1	743,6	ARCH(1) TARCH(1) GARCH(1) ARCH(2) TARCH(2) ARCH(2) TARCH(1) ABARCH(2) ARCH(2)	0,0%	0,0%	13,85	12,85	6,51	6,57	42%	37%
2	766,2	3	757,2		25,0%	10,0%	11,93	13,98	5,39	6,40	57%	280%
3	768,8	2	753,7		5,0%	10,0%	13,79	15,48	6,41	6,83	22%	25%
4	774,9	4	776,4		0,0%	15,0%	11,39	12,21	5,11	5,72	79%	52%
5	778,8	5	761,5		0,0%	5,0%	12,91	12,67	6,01	5,77	25%	22%

4. vzorec: 24. dec. 2007 - 28. nov. 2008 (n=212)

BIC RANG	BIC	DIC RANG	DIC	MODEL	VaR prekoračitev Bayes	ML	RMSE Bayes	ML	MME Bayes	ML	Povp. % razl. med vr. ocen. reg. koef.	Povp. % razl. med vr. ocen. reg. koef.
1	857,8	1	841,6	ARCH(1) TARCH(1) GARCH(1)	4,8%	0,0%	6,02	5,83	3,12	3,17	30%	27%
2	874,9	4	866,9	ARCH(2) TARCH(2)	4,8%	4,8%	5,87	6,31	3,29	3,11	51%	257%
3	879,2	2	857,4	ARCH(2) TARCH(1)	9,5%	9,5%	6,13	6,48	3,04	3,10	19%	20%
4	883,4	5	874,4	ARCH(1) GARCH(1)	14,3%	14,3%	6,57	6,45	3,49	3,60	68%	54%
5	883,9	3	865,0	ARCH(2)	9,5%	14,3%	6,65	6,57	3,49	3,47	22%	19%

Napovedi pogojne variance: 03. nov. 2008 - 28. nov. 2008 (n f.=20)

5. vzorec: 24. dec. 2007 - 30. oct. 2008 (n=212)

BIC RANG	BIC	DIC RANG	DIC	MODEL	VaR prekoračitev Bayes	ML	RMSE Bayes	ML	MME Bayes	ML	Povp. % razl. med vr. ocen. reg. koef.	Povp. % razl. med vr. ocen. reg. koef.
1	946,9	1	928,4	ARCH(1) TARCH(1) GARCH(1)	5,0%	5,0%	2,89	2,85	1,20	1,20	23%	22%
2	967,6	4	968,6	ARCH(2) TARCH(2)	5,0%	2,5%	2,90	2,93	1,21	1,19	52%	271%
3	970,2	2	947,8	ARCH(2) TARCH(1)	2,5%	2,5%	3,10	3,08	1,21	1,19	16%	17%
4	970,5	5	992,8	PARCH(2)	2,5%	5,0%	3,33	2,85	1,25	1,19	60%	44%
5	977,9	3	959,6	ARCH(1) GARCH(1)	2,5%	2,5%	3,25	3,07	1,24	1,21	22%	19%

Napovedi pogojne variance: 03. nov. 2008 - 28. nov. 2008 (n f.=20)

b) Modeli s predpostavljeni Studentovo t porazdelitvijo ostankov, tudi Bayes ocene temeljijo na simultani ocenitvi

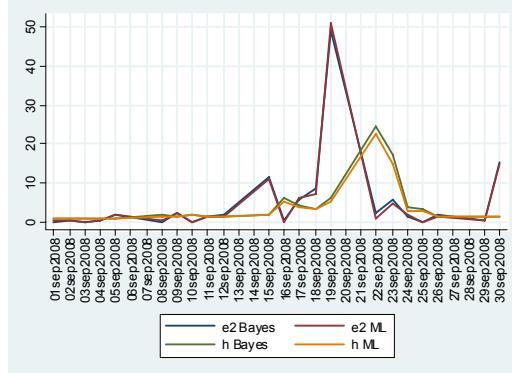
VZOREC	BIC	DIC	MODEL	VaR MISS		RMSE		MAE		MAPE		MME	
				Bayes	ML	Bayes	ML	Bayes	ML	Bayes	ML	Bayes	ML
1	555,1	534,5	ARCH(2)	13,6%	13,6%	11,30	11,57	5,44	5,70	2,14	1,79	4,55	4,60
2	646,7	620,1	ARCH(2) TARCH(2)	4,5%	4,5%	17,62	17,96	11,84	11,87	1,12	0,80	9,84	8,32
3	762,4	732,7	ARCH(1) TARCH(1) GARCH(1)	5,0%	0,0%	11,96	12,79	7,91	9,52	1,85	1,21	5,87	6,49
4	861,8	838,0	ARCH(1) TARCH(1) GARCH(1)	9,5%	0,0%	5,70	5,82	4,29	4,71	1,36	0,93	3,23	3,18
5	951,0	924,8	ARCH(1) TARCH(1) GARCH(1)	5,0%	5,0%	3,18	3,10	1,46	1,49	1,17	1,14	1,34	1,35

Vir vseh tabel: Podatkovna baza Ljubljanske borze, 2009.

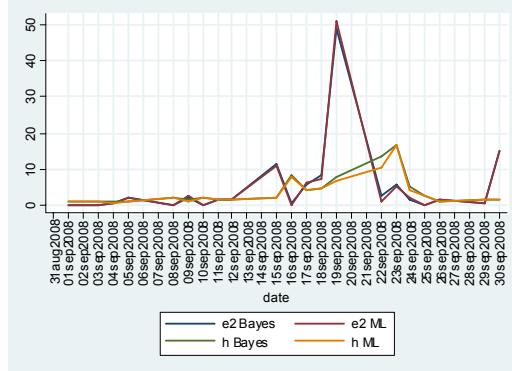
Priloga 12: Grafi realiziranih volatilnosti (e2) in napovedi pogojne variance (h) izbranih modelov

a) Ostanki se porazdeljujejo v normalni porazdelitvi

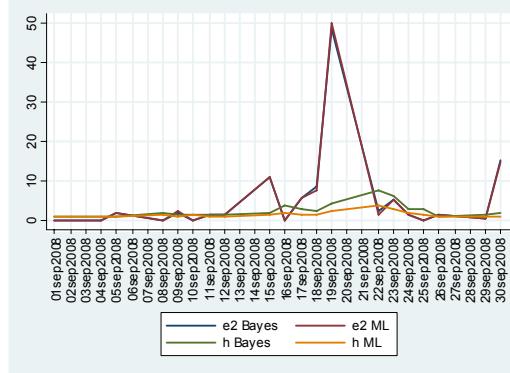
Slika 1: MA(1)-ARCH(2), ocenjen na podatkih 1-ega vzorca: 24. dec 2007 – 29. avg. 2008, napovedi generirane za obdobje 01. sept. 2008 – 30 sept. 2008



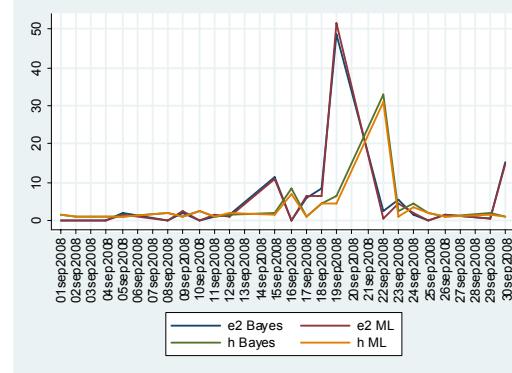
Slika 2: MA(1)-ARCH(2)-TARCH(1), ocenjen na podatkih 1-ega vzorca: 24. dec 2007 – 29. avg. 2008, napovedi generirane za obdobje 01. sept. 2008 – 30 sept. 2008



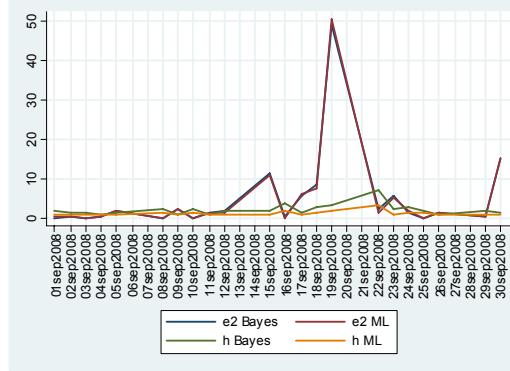
Slika 3: MA(1)-ABARCH(2), ocenjen na podatkih 1-ega vzorca: 24. dec 2007 – 29. avg. 2008, napovedi generirane za obdobje 01. sept. 2008 – 30 sept. 2008



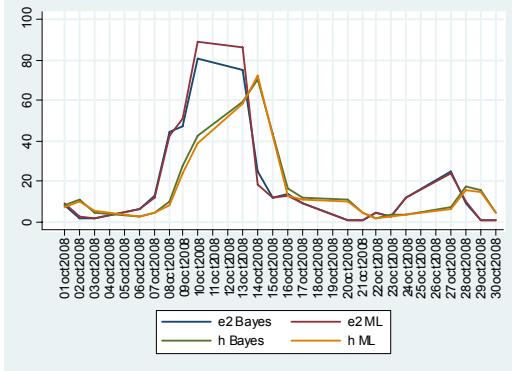
Slika 5: MA(1)-ARCH(1), ocenjen na podatkih 1-ega vzorca: 24. dec 2007 – 29. avg. 2008, napovedi generirane za obdobje 01. sept. 2008 – 30 sept. 2008



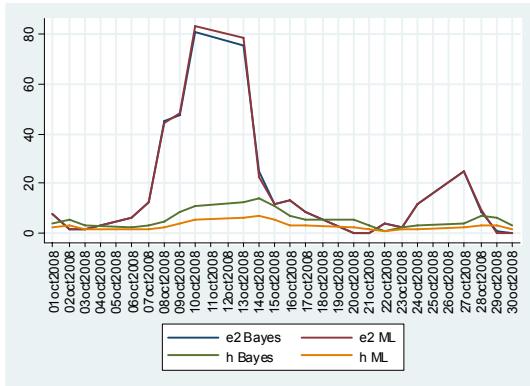
Slika 4: MA(1)-ABARCH(1), ocenjen na podatkih 1-ega vzorca: 24. dec 2007 – 29. avg. 2008, napovedi generirane za obdobje 01. sept. 2008 – 30 sept. 2008



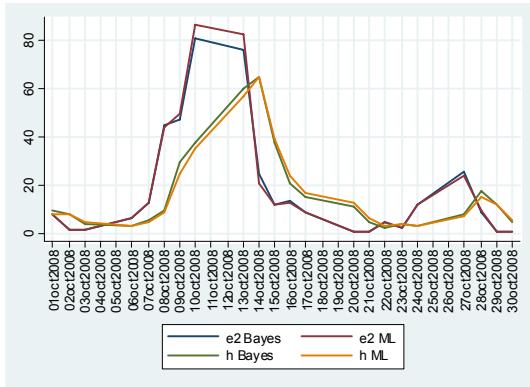
Slika 6: MA(1)-ARCH(2)-TARCH(1), ocenjen na podatkih 2-ega vzorca: 24. dec 2007 – 30. sept. 2008, napovedi generirane za obdobje 01. oct. 2008 – 30. oct. 2008



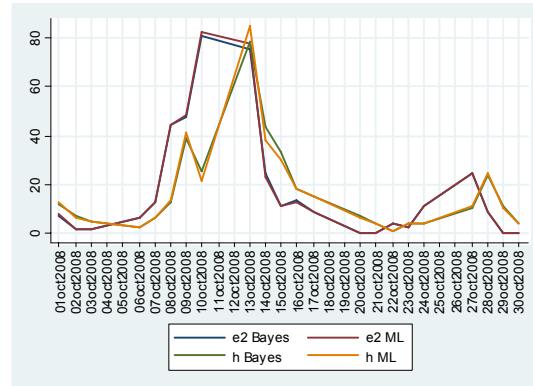
Slika 7: MA(1)-ARCH(2)-TARCH(2), ocenjen na podatkih 2-ega vzorca: 24. dec 2007 – 30. sept. 2008, napovedi generirane za obdobje 01. oct. 2008 – 30. oct. 2008



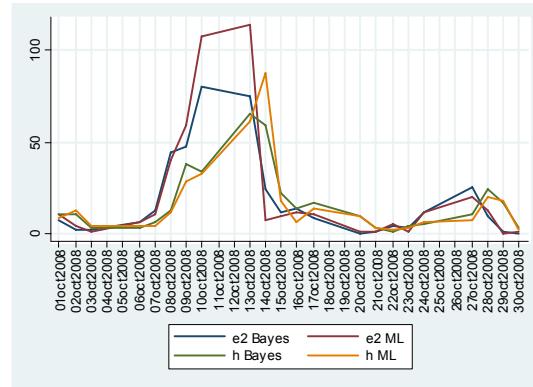
Slika 8: MA(1)-ARCH(2), ocenjen na podatkih 2-ega vzorca: 24. dec 2007 – 30. sept. 2008, napovedi generirane za obdobje 01. oct. 2008 – 30. oct. 2008



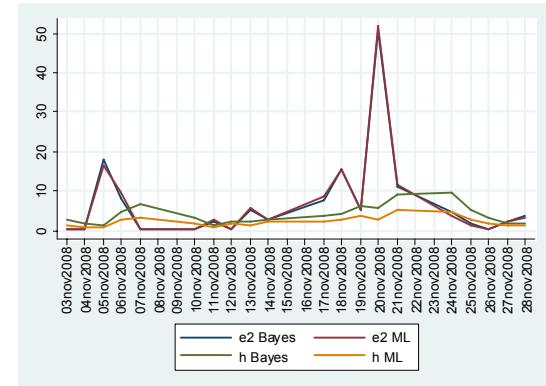
Slika 9: MA(1)-ABARCH(2), ocenjen na podatkih 2-ega vzorca: 24. dec 2007 – 30. sept. 2008, napovedi generirane za obdobje 01. oct. 2008 – 30. oct. 2008



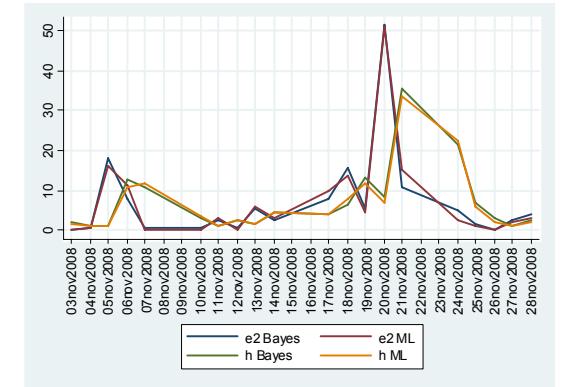
Slika 10: MA(1)-ARCH(1)-GARCH(1), ocenjen na podatkih 2-ega vzorca: 24. dec 2007 – 30. sept. 2008, napovedi generirane za obdobje 01. oct. 2008 – 30. oct. 2008



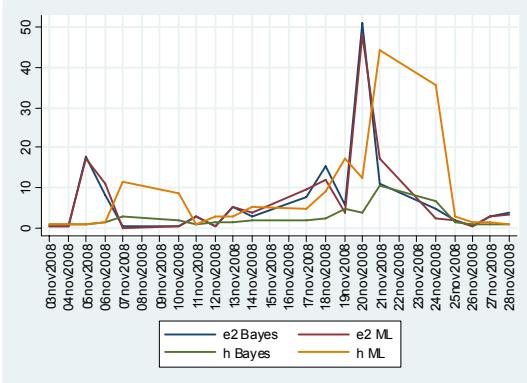
Slika 11: MA(1)-ARCH(1)-TARCH(1)-GARCH(1), ocenjen na podatkih 2-ega vzorca: 24. dec 2007 – 30. oct. 2008, napovedi generirane za obdobje 03. nov. 2008 – 28 nov. 2008



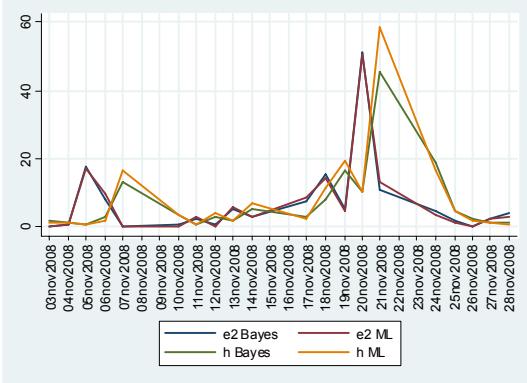
Slika 12: MA(1)-ARCH(2)-TARCH(2), ocenjen na podatkih 2-ega vzorca: 24. dec 2007 – 30. oct. 2008, napovedi generirane za obdobje 03. nov. 2008 – 28 nov. 2008



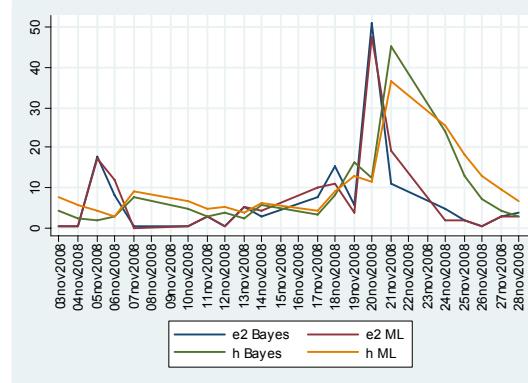
Slika 13: MA(1)-ARCH(2)-TARCH(1), ocenjen na podatkih 2-ega vzorca: 24. dec 2007 – 30. oct. 2008, napovedi generirane za obdobje 03. nov. 2008 – 28 nov. 2008



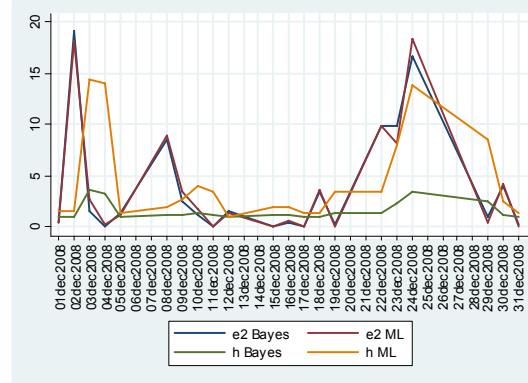
Slika 14: MA(1)-ABARCH(2), ocenjen na podatkih 2-ega vzorca: 24. dec 2007 – 30. oct. 2008, napovedi generirane za obdobje 03. nov. 2008 – 28 nov. 2008



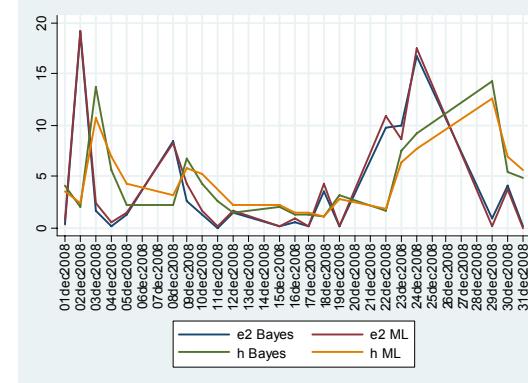
Slika 15: MA(1)-ARCH(2), ocenjen na podatkih 2-ega vzorca: 24. dec 2007 – 30. oct. 2008, napovedi generirane za obdobje 03. nov. 2008 – 28 nov. 2008



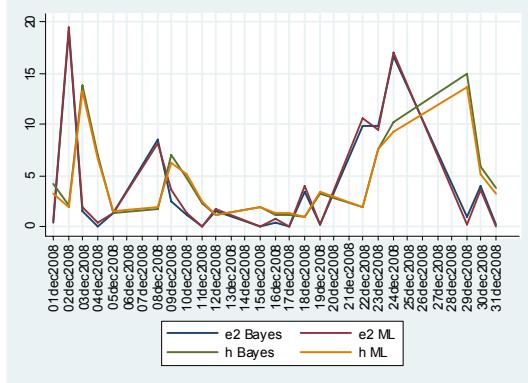
Slika 16: MA(1)-ARCH(1)-TARCH(1)-GARCH(1), ocenjen na podatkih 2-ega vzorca: 24. dec 2007 – 28. nov. 2008, napovedi generirane za obdobje 01. dec. 2008 – 31 dec. 2008



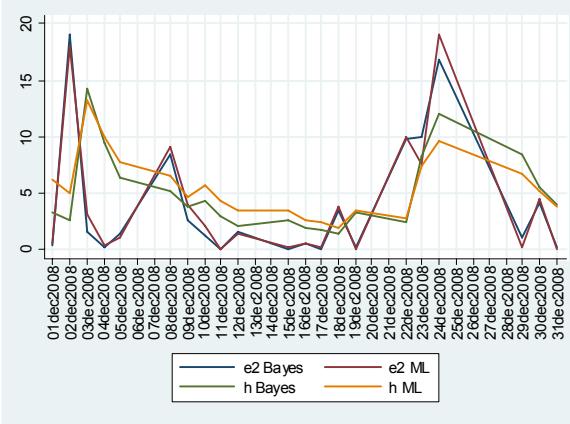
Slika 17: MA(1)-ARCH(2)-TARCH(2), ocenjen na podatkih 2-ega vzorca: 24. dec 2007 – 28. nov. 2008, napovedi generirane za obdobje 01. dec. 2008 – 31 dec. 2008



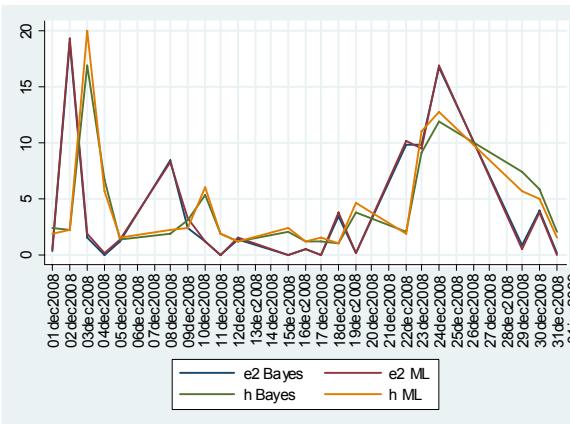
Slika 18: MA(1)-ARCH(2)-TARCH(1), ocenjen na podatkih 2-ega vzorca: 24. dec 2007 – 28. nov. 2008, napovedi generirane za obdobje 01. dec. 2008 – 31 dec. 2008



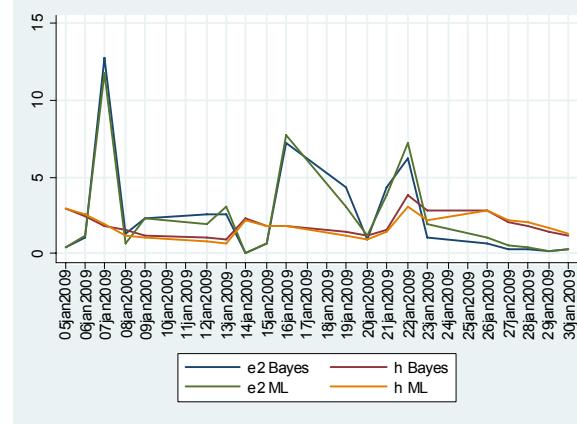
Slika 19: MA(1)-ARCH(1)-GARCH(1), ocenjen na podatkih 2-ega vzorca: 24. dec 2007 – 28. nov. 2008, napovedi generirane za obdobje 01. dec. 2008 – 31 dec. 2008



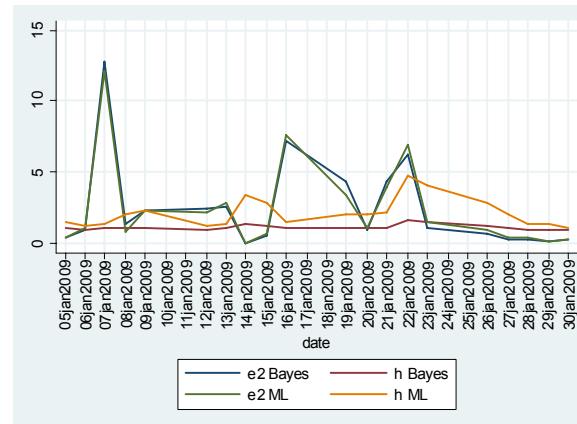
Slika 20: MA(1)-ARCH(2), ocenjen na podatkih 2-ega vzorca: 24. dec 2007 – 28. nov. 2008, napovedi generirane za obdobje 01. dec. 2008 – 31 dec. 2008



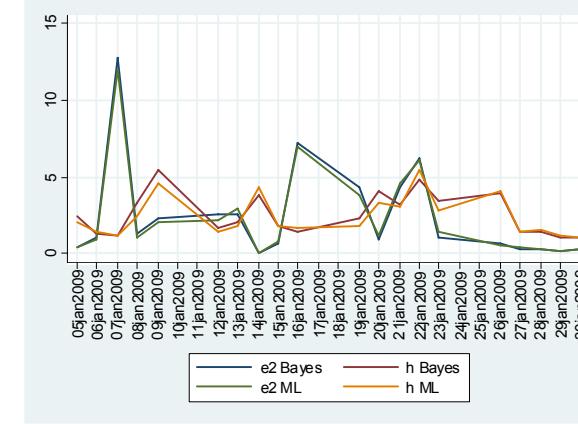
Slika 21: MA(1)-ARCH(2)- TARCH(2), ocenjen na podatkih 2-ega vzorca: 24. dec. 2007-31. dec. 2008, napovedi generirane za obdobje 05. jan. 2008 – 30. jan. 2008



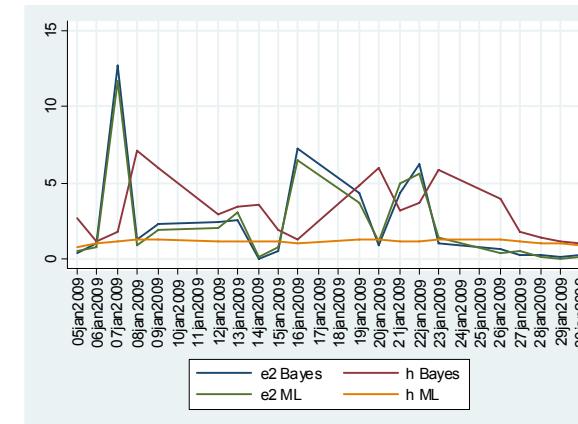
Slika 22: MA(1)-ARCH(2)- TARCH(2), ocenjen na podatkih 2-ega vzorca: 24. dec. 2007-31. dec. 2008, napovedi generirane za obdobje 05. jan. 2008 – 30. jan. 2008



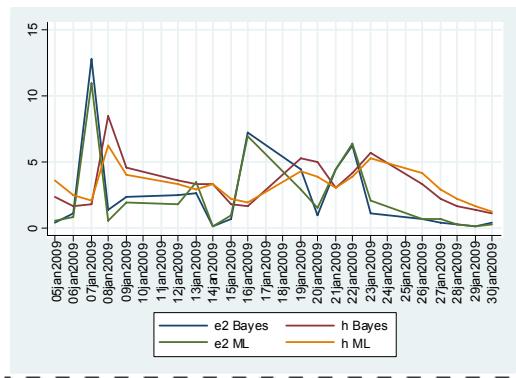
Slika 23: MA(1)-ARCH(2)- TARCH(1), ocenjen na podatkih 2-ega vzorca: 24. dec. 2007-31. dec. 2008, napovedi generirane za obdobje 05. jan. 2008 – 30. jan. 2008



Slika 24: MA(1)-ARCH(1)-GARCH(1), ocenjen na podatkih 2-ega vzorca: 24. dec. 2007-31. dec. 2008, napovedi generirane za obdobje 05. jan. 2008 – 30. jan. 2008

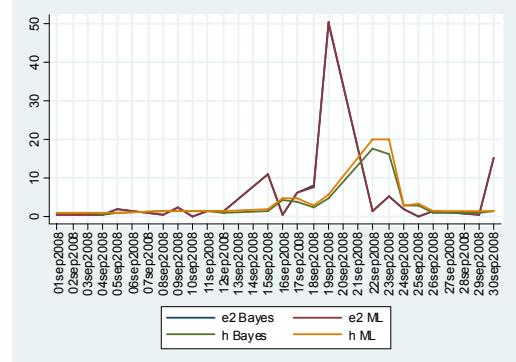


Slika 1: MA(1)-ARCH(2), ocenjen na podatkih 1-ega vzorca: 24. dec 2007 – 29. avg. 2008, napovedi generirane za obdobje 01. sept. 2008 – 30 sept. 2008

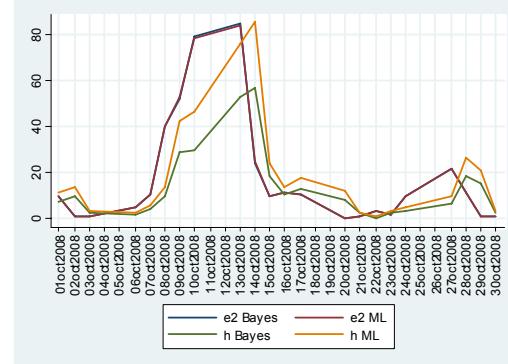


b) Ostanki se porazdeljujejo v Studentovi t porazdelitvi

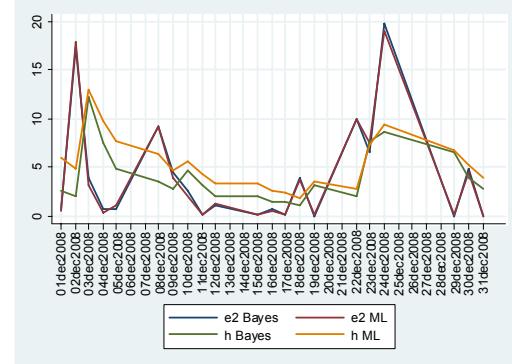
Slika 2: MA(1)-ARCH(2)-TARCH(1), ocenjen na podatkih 2-ega vzorca: 24. dec 2007 – 30. sept. 2008, napovedi generirane za obdobje 01. oct. 2008 – 30 oct. 2008



Slika 3: MA(1)-ARCH(1)-TARCH(1)-GARCH(1), ocenjen na podatkih 2-ega vzorca: 24. dec 2007 – 30. oct. 2008, napovedi generirane za obdobje 03. nov. 2008 – 28 nov. 2008



Slika 4: MA(1)-ARCH(1)-TARCH(1)-GARCH(1), ocenjen na podatkih 2-ega vzorca: 24. dec 2007 – 28. nov. 2008, napovedi generirane za obdobje 01. dec. 2008 – 31 dec. 2008

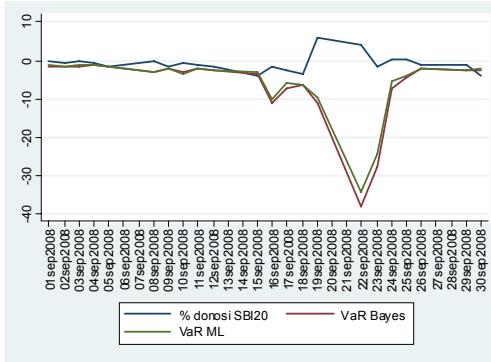


Vir vseh slik: Podatkovna baza Ljubljanske borze, 200

Priloga 13: Grafi tvegane vrednosti (VaR) in dejanskih donosov indeksa SBI20

a) Ostanki se porazdeljujejo v normalni porazdelitvi:

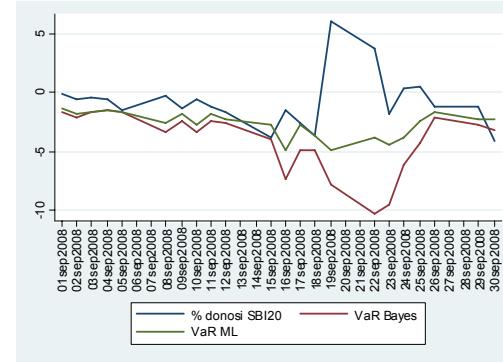
Slika 1: MA(1)-ARCH(2), ocenjen na podatkih 1-ega vzorca: 24. dec 2007 – 29. avg. 2008, napovedi generirane za obdobje 01. sept. 2008 – 30 sept. 2008



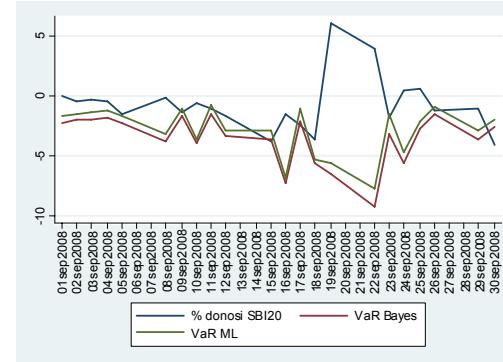
Slika 2: MA(1)-ARCH(2)-TARCH(1), ocenjen na podatkih 1-ega vzorca: 24. dec 2007 – 29. avg. 2008, napovedi generirane za obdobje 01. sept. 2008 – 30 sept. 2008



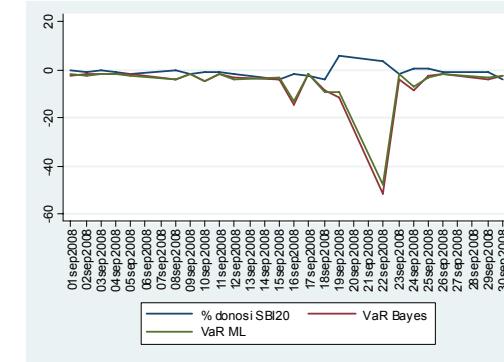
Slika 3: MA(1)-ABARCH(2), ocenjen na podatkih 1-ega vzorca: 24. dec 2007 – 29. avg. 2008, napovedi generirane za obdobje 01. sept. 2008 – 30 sept. 2008



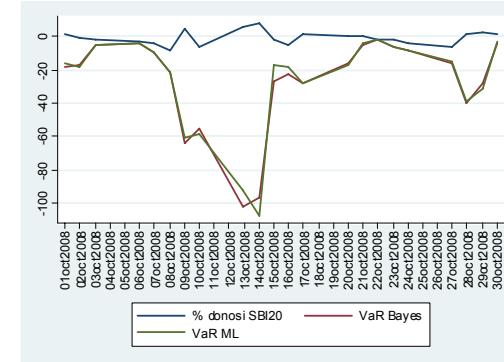
Slika 4: MA(1)-ABARCH(1), ocenjen na podatkih 1-ega vzorca: 24. dec 2007 – 29. avg. 2008, napovedi generirane za obdobje 01. sept. 2008 – 30 sept. 2008



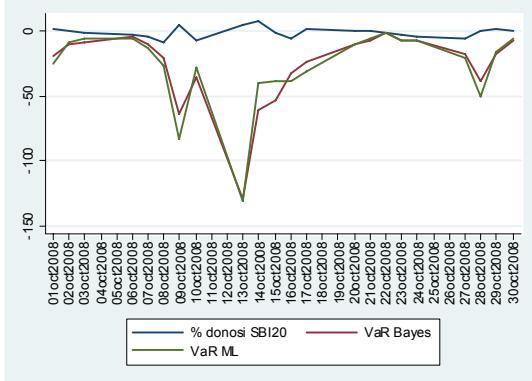
Slika 5: MA(1)-ARCH(1), ocenjen na podatkih 1-ega vzorca: 24. dec 2007 – 29. avg. 2008, napovedi generirane za obdobje 01. sept. 2008 – 30 sept. 2008



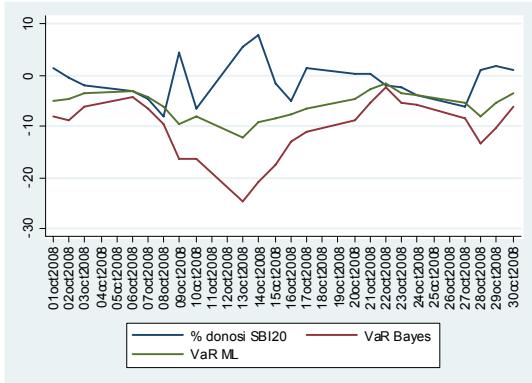
Slika 6: MA(1)-ARCH(2)-TARCH(2), ocenjen na podatkih 2-ega vzorca: 24. dec 2007 – 30. sept. 2008, napovedi generirane za obdobje 01. oct. 2008 – 30 oct. 2008



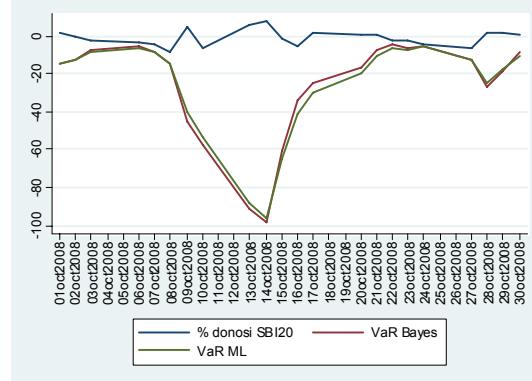
Slika 7: MA(1)-ARCH(2)-TARCH(1), ocenjen na podatkih 2-ega vzorca: 24. dec 2007 – 30. sept. 2008, napovedi generirane za obdobje 01. oct. 2008 – 30 oct. 2008



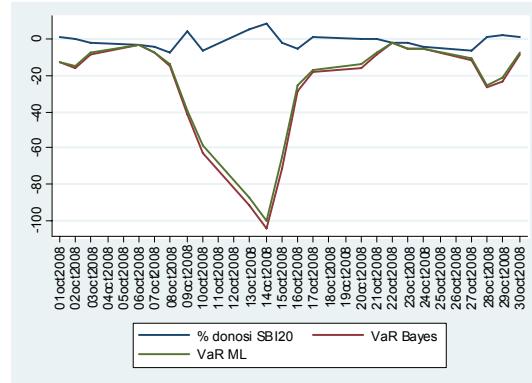
Slika 8: MA(1)-ABARCH(2), ocenjen na podatkih 2-ega vzorca: 24. dec 2007 – 30. sept. 2008, napovedi generirane za obdobje 01. oct. 2008 – 30 oct. 2008



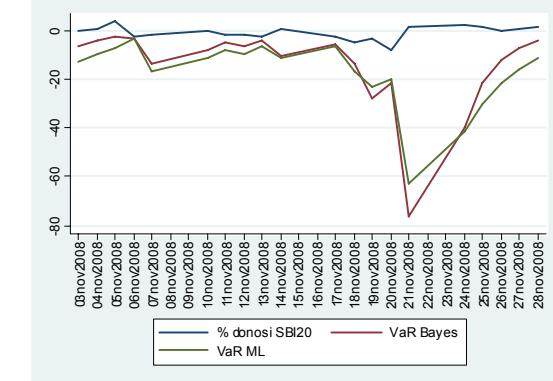
Slika 9: MA(1)-ARCH(1)-GARCH(1), ocenjen na podatkih 2-ega vzorca: 24. dec 2007 – 30. sept. 2008, napovedi generirane za obdobje 01. oct. 2008 – 30 oct. 2008



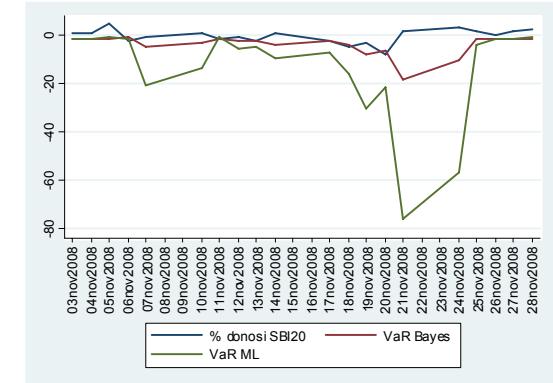
Slika 10: MA(1)-ARCH(2), ocenjen na podatkih 2-ega vzorca: 24. dec 2007 – 30. sept. 2008, napovedi generirane za obdobje 01. oct. 2008 – 30 oct. 2008



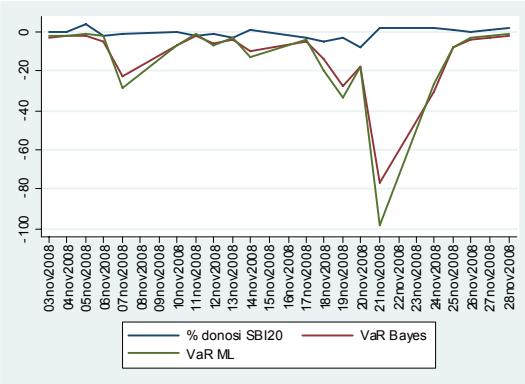
Slika 11: MA(1)-ARCH(1)-TARCH(1)-GARCH(1), ocenjen na podatkih 3-ega vzorca: 24. dec 2007 – 30. oct. 2008, napovedi generirane za obdobje 03. nov. 2008 – 28 nov. 2008



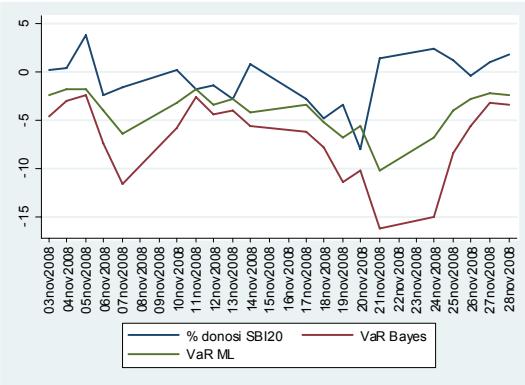
Slika 12: MA(1)-ARCH(2)-TARCH(2), ocenjen na podatkih 3-ega vzorca: 24. dec 2007 – 30. oct. 2008, napovedi generirane za obdobje 03. nov. 2008 – 28 nov. 2008



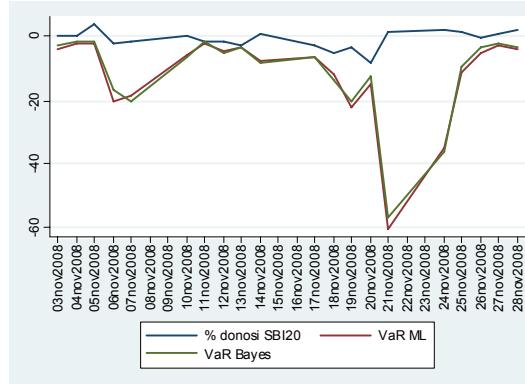
Slika 13: MA(1)-ARCH(2)-TARCH(1), ocenjen na podatkih 3-ega vzorca: 24. dec 2007 – 30. oct. 2008, napovedi generirane za obdobje 03. nov. 2008 – 28 nov. 2008



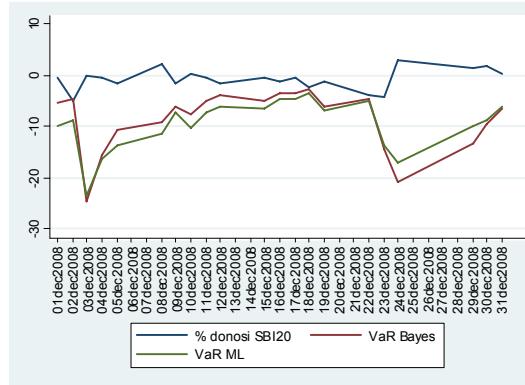
Slika 14: MA(1)-ABARCH(2), ocenjen na podatkih 3-ega vzorca: 24. dec 2007 – 30. oct. 2008, napovedi generirane za obdobje 03. nov. 2008 – 28 nov. 2008



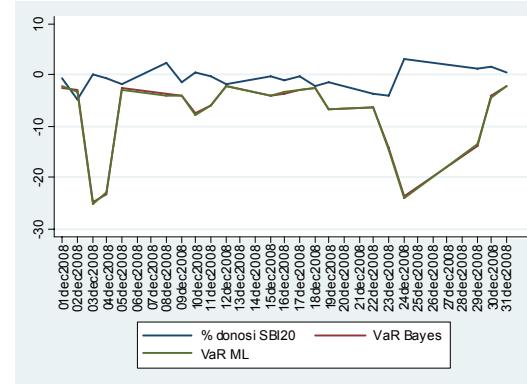
Slika 15: MA(1)-ARCH(2), ocenjen na podatkih 3-ega vzorca: 24. dec 2007 – 30. oct. 2008, napovedi generirane za obdobje 03. nov. 2008 – 28 nov. 2008



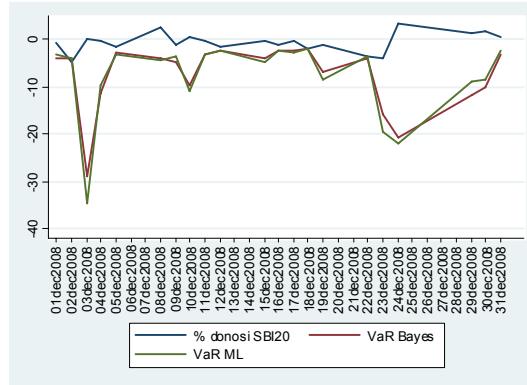
Slika 16: MA(1)-ARCH(1)-TARCH(1)-GARCH(1), ocenjen na podatkih 4-ega vzorca: 24. dec 2007 – 28. nov. 2008, napovedi generirane za obdobje 01. dec. 2008 – 31 dec. 2008



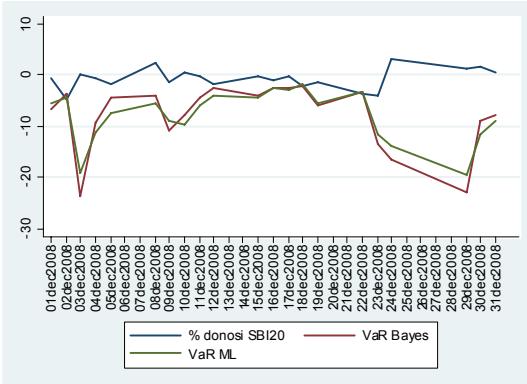
Slika 17: MA(1)-ARCH(2)-TARCH(2), ocenjen na podatkih 4-ega vzorca: 24. dec 2007 – 28. nov. 2008, napovedi generirane za obdobje 01. dec. 2008 – 31 dec. 2008



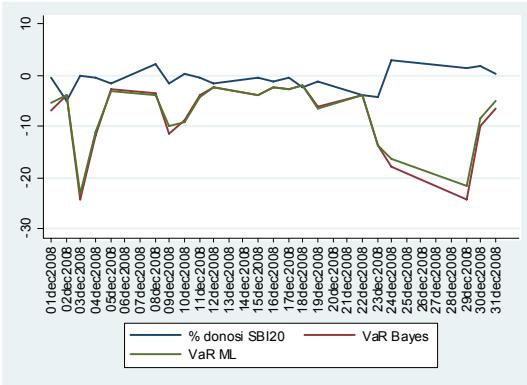
Slika 18: MA(1)-ARCH(2)-TARCH(1), ocenjen na podatkih 4-ega vzorca: 24. dec 2007 – 28. nov. 2008, napovedi generirane za obdobje 01. dec. 2008 – 31 dec. 2008



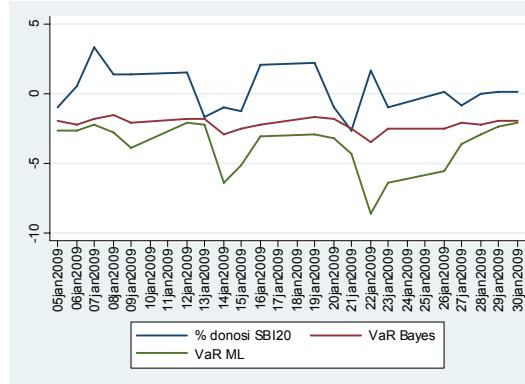
Slika 19: MA(1)-ARCH(1)-GARCH(1), ocenjen na podatkih 4-ega vzorca: 24. dec 2007 – 28. nov. 2008, napovedi generirane za obdobje 01. dec. 2008 – 31 dec. 2008



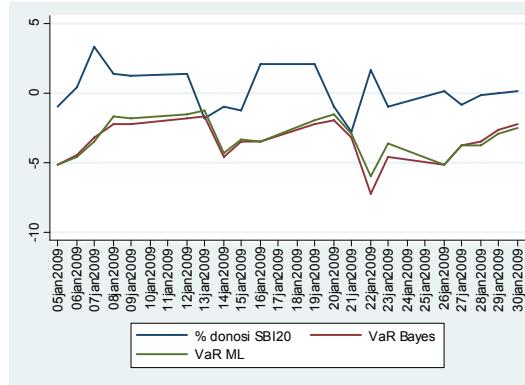
Slika 20: MA(1)-ARCH(2), ocenjen na podatkih 4-ega vzorca: 24. dec 2007 – 28. nov. 2008, napovedi generirane za obdobje 01. dec. 2008 – 31 dec. 2008



Slika 21: MA(1)-ARCH(2)-TARCH(2), ocenjen na podatkih 5-ega vzorca: 24. dec. 2007-31. dec. 2008, napovedi generirane za obdobje 05. jan. 2008 – 30. jan. 2008



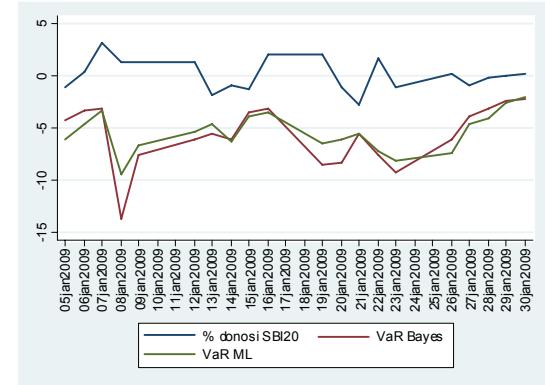
Slika 22: MA(1)-ARCH(2)-TARCH(2), ocenjen na podatkih 5-ega vzorca: 24. dec. 2007-31. dec. 2008, napovedi generirane za obdobje 05. jan. 2008 – 30. jan. 2008



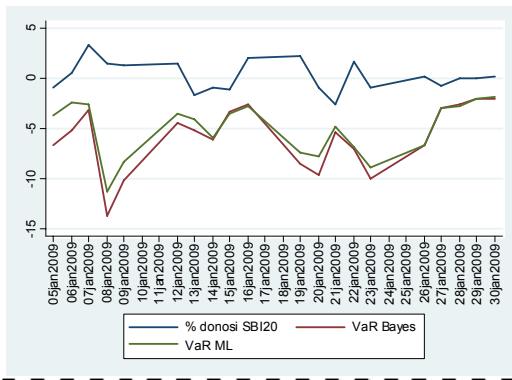
Slika 23: MA(1)-ARCH(2)-TARCH(1), ocenjen na podatkih 5-ega vzorca: 24. dec. 2007-31. dec. 2008, napovedi generirane za obdobje 05. jan. 2008 – 30. jan. 2008



Slika 24: MA(1)-ARCH(1)-GARCH(1), ocenjen na podatkih 5-ega vzorca: 24. dec. 2007-31. dec. 2008, napovedi generirane za obdobje 05. jan. 2008 – 30. jan. 2008

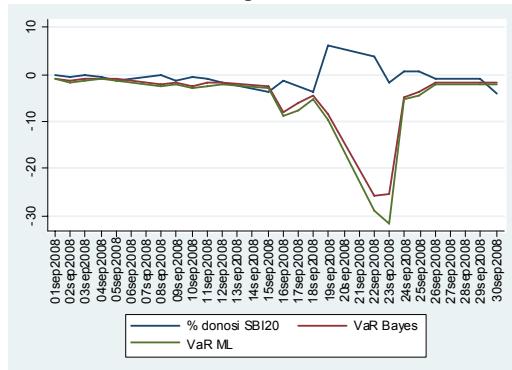


Slika 25: MA(1)-ARCH(2), ocenjen na podatkih 5-ega vzorca: 24. dec. 2007-31. dec. 2008, napovedi generirane za obdobje 05. jan. 2008 – 30. jan. 2008

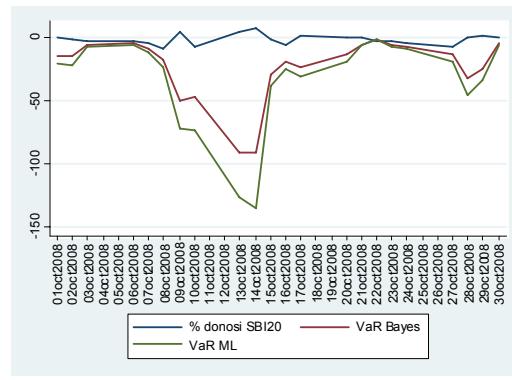


b) Ostanki se porazdeljujejo v Studentovi t porazdelitvi:

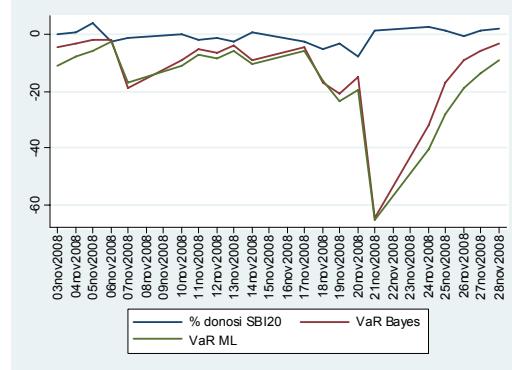
Slika 1: MA(1)-ARCH(2), ocenjen na podatkih 1-ega vzorca: 24. dec 2007 – 29. avg. 2008, napovedi generirane za obdobje 01. sept. 2008 – 30 sept. 2008



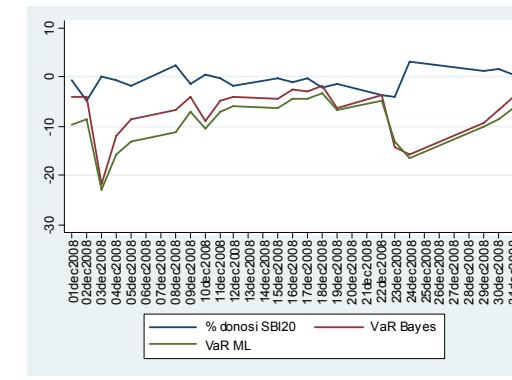
Slika 2: MA(1)-ARCH(2)-TARCH(1), ocenjen na podatkih 2-ega vzorca: 24. dec 2007 – 30. sept. 2008, napovedi generirane za obdobje 01. oct. 2008 – 30 oct. 2008



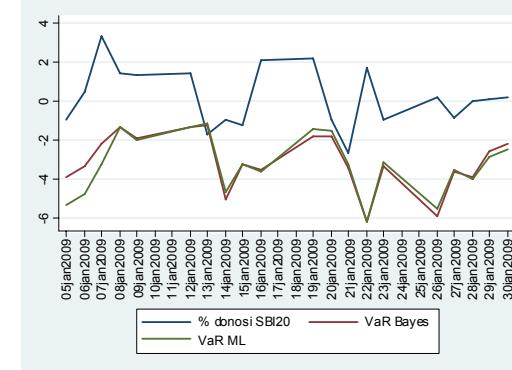
Slika 3: MA(1)-ARCH(1)-TARCH(1))-GARCH(1), ocenjen na podatkih 3-ega vzorca: 24. dec 2007 – 30. oct. 2008, napovedi generirane za obdobje 03. nov. 2008 – 28 nov. 2008



Slika 4: MA(1)-ARCH(1)-TARCH(1)-GARCH(1), ocenjen na podatkih 4-ega vzorca: 24. dec 2007 – 28. nov. 2008, napovedi generirane za obdobje 01. dec. 2008 – 31 dec. 2008



Slika 5: MA(1)-ARCH(2)- TARCH(2), ocenjen na podatkih 5-ega vzorca: 24. dec. 2007-31. dec. 2008, napovedi generirane za obdobje 05. jan. 2008 – 30.jan. 2008



Vir vseh slik: Podatkovna baza Ljubljanske borze, 2009.

Priloga 14: Winbugs koda za ARMA(1,1)-GARCH(1,1) model

```
model { for (t in 1:T) {y[t]~dnorm(mu[t],tau[t])
e[t]<-y[t]-mu[t]}
```

#ARMA model

```
for (t in 2:T) {mu[t]<-cons+rho*y[t-1]+th*e[t-1]}
```

#ARCH model

```
for (t in 2:T) {h[t]<-alpha[1]+alpha[2]*pow(e[t-1],2)+beta[1]*h[t-1]
tau[t]<-1/h[t]}
```

#ARMA observations with latent data

```
mu[1]<-cons+th*e0+rho*y0
```

#GARCH observations with latent data

```
h[1]<-alpha[1]+alpha[2]*pow(e0,2)+beta[1]*h0
tau[1]<-1/h[1]
```

#priors for latent data

```
e0~dt(0,0.01,10)
y0~dt(0,0.01,10)
h0~dnorm(1,0.1) I(0,10)
```

#priors on ARMA coefficients

```
cons~dnorm(0,0.001)
rho~dnorm(0,0.001) I(-1,1)
th~dnorm(0,0.001) I(-1,1)
```

alternative priors

```
# cons~dunif(10,10)
# rho~dunif(-1,1)
# th~dunif(-1,1)
```

#priors for GARCH model

```
alpha[1]~dnorm( 0.396,0.001) I(0,)
alpha[2]~dnorm(0.440,0.001) I(0,1)
beta[1]~dnorm(0.370,0.001) I(0,1)
```

##alternative priors

```
# alpha[1]~ dunif(0,10)
# alpha[2]~ dunif(0,1)
# beta[1]~dunif(0,1)
}
```

Vir: Lastna elaboracija, P.Congdon (2006), J. Bijak (2006).

Priloga 15: Avtokorelacija in avtokorelogram

Najenostavnejši test stacionarnosti temelji na koreogramu. Izačunati moramo avtokorelacijsko funkcijo¹³². Avtokorelacijska funkcija je zaporedje koeficientov avtokorelacije pri različnih odlogih. Koeficient avtokorelacije je razmerje med kovarianco odlogov¹³³ ter varianco¹³⁴:

$$\rho_k = \frac{\gamma_k}{\gamma_0} \quad (133)$$

γ_k – kovarianca pri odlogu k

γ_0 – varianca

Ker pa pri naši analizi razpolagamo zgolj z eno realizacijo naključnega procesa (časovno vrsto), izračunavamo vzorčno avtokovarianco¹³⁵:

$$\hat{\gamma}_k = \frac{\sum_{t=h+1}^T (y_t - \bar{y})(y_{t+k} - \bar{y})}{T - k} \quad (134)$$

Varianca meri razpršenost slučajne spremenljivko okoli njene srednje vrednosti. Oceno variance ki je po definiciji enaka oceni kovariance pri odlogu nič izračunamo kot¹³⁶:

$$\hat{\gamma}_0 = \frac{\sum_{t=h+1}^T (y_t - \bar{y})^2}{T - 1} \quad (135)$$

Vzorčna avtokorelacijska funkcija je definirana kot razmerje med vzorčno avtokovarianco in vzorčno varianco:

$$\hat{\rho}_k = \frac{\hat{\gamma}_k}{\hat{\gamma}_0} \quad (136)$$

Avtokorelacija med odlogi popolnoma naključnega procesa je po definiciji enaka nič. Visoka in vztrajna avtokorelacija, tudi pri velikih odlogih k , pa je znak da časovna vrsta ni stacionarna.

Delni avtokorelacijski koeficient nam prav tako pove kolikšna je avtokorelacija med členi v časovni vrsti glede na odlog k , le da tokrat iz vrednosti avtokorelacijskega koeficiente izločimo vpliv vmesnih členov. Izračun delnih avtokorelacijskih koeficientov je zapleten (za razlago izračuna glej Fabozzi et al. (2007, str. 225-227 in 229-231)).

¹³² Ang. *Autocorelation Function*.

¹³³ Ang. *Laged Covariances*.

¹³⁴ Ang. *Variance*.

¹³⁵ Ocene oz. vzorčne spremenljivke označujemo s strešico. V praksi zaradi matematičnih razlogov imenovalec zamenjamo s T .

¹³⁶ V praksi zaradi matematičnih razlogov imenovalec zamenjamo s T .

Priloga 16: Q statistika

Q statistiko sta razvila Box in Pierce razvila in nato izpopolnila Ljung in Box (Box & Ljung, 1978, str. 297 in 301)¹³⁷, uporablja se za preverjanje hipoteze o prisotnosti avtokorelacije v časovni vrsti. Q statistiko izračunamo na sledeč način¹³⁸ (Fabozzi et al., 2007, str. 264):

$$Q_{LB} = T(T+2) \sum_{\tau=1}^m \hat{\rho}^2(\tau) / (T-\tau) \sim \chi^2(m) \quad (137)$$

Q statistika se porazdeljuje v χ^2 porazdelitvi z m stopinjam prostosti, ki so enake številu odlogov. V kolikor izračunani Q presega kritično Q vrednost zavrnemo ničelno hipozo, ki pravi da so vsi avtokorelacijski koeficienti hkrati enaki nič. Sprejmemo alternativno hipotezo, ki pravi da je vsaj en avtokorelacijski koeficient statistično značilno različen od nič.

¹³⁷ Njuna različica ima boljše lastnotsti v majhnih vzorcih. V velikih vzorcih sta enako učinkoviti.

¹³⁸ Sprva se je oznaka Q nanašala na koeficient Box-Pierca in oznaka LB na Ljung-Box različico Q statistike. Dandanes oznaka Q označuje kar Ljung-Box različico, saj prvotna različica skorajda ni več v uporabi.

Priloga 17: Seznam uporabljenih kratic

AR – Auto Regressive

ARCH – Autoregressive Conditional Hetereoscedasticity

ARMA – Auto Regressive Integrated Moving Average Models

GARCH – Generalized Autoregressive Conditional Hetereoscedasticity

i.i.d. – Identical and Independently Distributed

L – Likelihood

LL – Log Likelihood

MA – Moving Average

MAE – Mean Absolute Error

MAPE – Mean Absolute Percentage Error

ML – Maximum Likelihood

MME – Mixed Mean Error

MNKV – Metoda najmanjših kvadratov

QML – Quasi Maximum Likelihood

RMSE – Root Mean Square Error

SBI20 – Slovenski borzni indeks 20

Priloga 18: Terminološki slovarček

Acceptance Probability = stopnja sprejetja

Augmented Dickey-Fuller Test = ojačan Dickey-Fuller test

Autoregressive Conditional Heteroskedasticity = pogojna heteroskedastičnost pojasnjena z avtoregresijo

Autoregressive Integrate Moving Average Model = integriran avtoregresijski model s premikajočim povprečjem

Autoregressive Model = avtoregresijski model

Bayes Rule = Bayesovo pravilo

Beast Linear Unbiased Estimator = najboljša linearna nepristranska cenilka

Block Sampling = vzorčenju po blokih parametrov

Burn-in Period = obdobje izgorevanja

Component Wise Sampling = vzorčenje po komponentah

Conditional Likelihood Function = pogojna funkcija verjetja

Conditional Probability = pogojna verjetnost

Conditional Variance = pogojna varianca

Data Generating Process = proces generiranja podatkov

Deviance = odklonskost

Difference Stationary Process = proces stacionaren v diferencah

Distributed Lag Models = modeli porazdeljenih odlogov

Effective Number of Parameters = efektivno število parametrov

Estimator = cenilka

Exogenous Variable = eksogena (neodvisna) spremenljivka

Exponential ARCH Model = eksponentni ARCH model

Factor Analysis = faktorska analiza

Fit of a Model = prileganje modela (podatkom)

Fractionally Integrated ARCH Model = delno integriran ARCH model

Frequentist Approach = frekventnostni (klasični) pristop

Generalized ARCH Model = pospoložen ARCH model

Identical and Independently Distributed = neodvisno in identično porazdeljeno

Information Criteria = informacijski kriterij

Iteration = krog oz. ponovitev

Kurtosis = sploščenost

Lag Operator = operator odloga

Lag Polynom = polinom odlogov

Leverage Effect = učinek vzhoda

Least Squares Estimator = cenilka po metodi najmanjših kvadratov

Leptocurtic Distribution = leptokurtična porazdelitev

Likelihood Function = funkcija verjetja

Log Likelihood Function = logaritmirana funkcija verjetja

Long Memory Effect = učinek dolgega spomina

Loss Function = funkcija izgube

Marginal Probability = mejna verjetnost

Markov Chain = Markova verga

Maximum Likelihood Estimator = cenilka po metodi največjega verjetja

Mean Absolute Error = povprečna absolutna napaka

Mean Absolute Percentage Error = povprečna absolutna napaka izražena v odstotkih

Mixed Mean Error = mešana povprečna napaka

Moving Average Model = model premikajočega povprečja

Multi Step Ahead Forecast = napovedi generirane za več obdobjij vnaprej (ponavadi temeljijo na napovedanih podatkih)

Natural Conjugate Prior Distribution = naravno konjugirana priorna porazdelitev

Non Informative Prior Distribution = neinformativna priorna porazdelitev

Non Linear ARCH Model = nelinearni ARCH model

Normal Mixture Density = mešana normalna porazdelitev (gostota)

One Step Ahead Forecast = napovedi generirane za eno obdobje naprej (ponavadi temeljijo na dejanskih podatkih)

Platikurtic Distribution = platikurtična porazdelitev

Proxy Measure = izvedena oz. posredna mera

Posterior Probability (Posterior Distribution) = posteriorna verjetnost (posteriorna porazdelitev)

Power ARCH Model = potenčni ARCH model

Principal Component Analysis = analiza glavnih komponent

Prior Probability (Prior Distribution) = priorna verjetnost (priorna porazdelitev)

Probability Density Function = funkcija gostote verjetnosti oz. gostota verjetnosti oz. (zvezna)

verjetnostna porazdelitev

Quasi Maximum Likelihood = psevdo oz. kvazi metoda največjega verjetja

Random Walk = naključni hod

Reverse Characteristic Equation = obratna karakteristična enačba

Risk Averse = nenaklonjen tveganju

Root Mean Square Error = povprečna kvadrirana napaka

Roots of the Polynom = ničle polinoma

Skewness = ukrivljenost

State Space Model = model prostorov stanj

Strictly Stationary Process = strogo stacionaren proces

Strict White Noise = strogi beli šum

Threshold ARCH Model = pragovni ARCH model

Unit Root Nonstationary Time Serie = nestacionarna časovna vrsta ki vsebuje enotsko rešitev

Unit Root Test = test enotske rešitve

Unobservables (Latent Preseries) = neopazovane vrednosti (latentna/skrita opazovanja)

Value at Risk = tvegana vrednost

Vector Autoregression = vektorska avtoregresija

Volatility = volatilnost

Volatility Clustering = skupinjenje volatilnosti

White Noise = beli šum

Z-score = z statistika