UNIVERZA V LJUBLJANI
FAKULTETA ZA MATEMATIKO IN FIZIKO
Finančna matematika – 2. stopnja

Blaž Rugelj

Transformacija proporcionalnega hazarda

Magistrsko delo

Mentor: prof. dr. Roman Drnovšek

Ljubljana, 2014

Podpisani Blaž Rugelj izjavljam:

- da sem magistrsko delo z naslovom *Transformacija proporcionalnega hazarda* izdelal samostojno pod mentorstvom prof. dr. Romana Drnovška in
- da Fakulteti za matematiko in fiziko Univerze v Ljubljani dovoljujem objavo elektronske oblike svojega dela na spletnih straneh.

Ljubljana, 2014 Podpis: ....

Zahvala

Zahvaljujem se svojemu mentorju, prof. dr. Romanu Drnovšku, za vodenje pri pisanju magistrske naloge. Njegovi številni nasveti so mi bili v veliko pomoč pri mojem delu.

Zahvaljujem se tudi svojemu dekletu, staršem in prijateljem, ki so mi stali ob strani in me podpirali v času izdelave magistrskega dela.

Kazalo

Program dela

Obravnavajte Wangove premijske principe, ki imajo pomembno vlogo v aktuarski matematiki. Izhodiščna literatura je članek S. Wang: *Premium calculation by transforming the layer premium density*, ASTIN Bulletin 26 (1996), 71–92.

Ljubljana, 2014 | Mentor: Roman Drnovšek

Povzetek

V magistrskem delu predstavljamo transformacijo proporcionalnega hazarda. To je poseben primer transformacije preživetvene funkcije, ki je najbolj primeren za uporabo kot premijski princip. Predstavimo vse želene lastnosti in prikažemo številne primere uporabe transformacije proporcionalnega hazarda v aktuarstvu, na primer pri optimizaciji pozavarovanja in pri faktorjih povečanja maksimalnega kritja.

Abstract

In master thesis we present proportional hazard transform. It is a special case of survival function transforms, which has most favourable features to be used as a premium principle. We present all of these features and show many examples, how proportional hazard transform can be used in actuarial science, for example by reinsurance optimization and increased limits factors.

Math. Subj. Class. (2010): 62P05

Ključne besede: PH transformacija, transformacija preživetvene funkcije, premijski princip

Keywords: PH transform, survival function transform, premium principle

Poglavje 1

Uvod

V magistrskem delu bomo spoznali transformacijo proporcionalnega hazarda (PH transformacijo). Pri njej s transformacijo preživetvene funkcije slučajne spremenljivke X dobimo novo slučajno spremenljivko Y, ki v povprečju zavzame večje vrednosti. To uporabimo v zavarovalništvu, kjer namesto prave porazdelitve škode operiramo s porazdelitvijo njene PH transformiranke, ki ji sedaj lahko dodelimo "pošteno" premijo, torej njeno matematično upanje, saj je to višje od matematičnega upanja škode. Temu načinu določanja premije bomo rekli PH premijski princip.

V drugem poglavju bomo spoznali Panjerjev algoritem, ki sicer ni neposredno povezan s PH transformacijo, vendar je nepogrešljivo orodje pri računanju agregatne porazdelitve škod. Ker ga bomo za to potrebovali tudi mi, je prav, da spoznamo tudi teoretično ozadje te metode.

V tretjem poglavju bomo natančno definirali, kaj so premijski principi in spoznali, katere lastnosti od njih pričakujemo. V nadaljevanju bomo videli, da jih ima PH premijski princip večino, tudi nekatere, ki jih pogosteje uporabljeni premijski principi nimajo. Predstavljeni so tudi sloji tveganja X. Gre za slučajne spremenljivke, ki osnovno tveganje razdelijo na več manjših delov, od katerih vsak krije le nek pas med dvema vrednostma. Spoznali bomo medsebojno stohastično urejenost slojev in pojem komonotonosti, ki nam pove, da se dve slučajni spremenljivki povečujeta ali zmanjšujeta hkrati. Sloji istega tveganja so namreč komonotoni.

V četrtem poglavju bomo spoznali širši razred premijskih principov, ki jih dobimo s transformacijo preživetvene funkcije. Pogledali bomo, katere lastnosti morajo transformacije imeti, da bo dobljeni premijski princip smiseln. Našteli bomo nekaj primerov transformacijskih funkcij in primerjali smiselnost dobljenih premij na preprostem primeru. Ker se najbolje izkaže PH transformacija, ji bomo namenili dodatno pozornost.

V zadnjem poglavju bomo najprej spoznali nekaj porazdelitev, za katere so znane tudi porazdelitve njihovih PH transformirank. Za konec bomo pogledali na transformacijo proporcionalnega hazarda še s praktičnega vidika. Med drugim bomo spoznali, kako se lahko zavarovalnica optimalno pozavaruje, kako se določa povečanje premije ob zvišanju maksimalnega kritja in kako lahko določimo premijo agregatnih škod, kjer je število škod prav tako slučajno.

Poglavje 2

Ekvidistantna diskretizacija in Panjerjeva rekurzija

V tem poglavju bomo spoznali postopek, ki se ga bomo posluževali pri računanju PH premijskega principa na agregatnih porazdelitvah škod. Za začetek si bomo pogledali diskretizacijo, ki služi kot predpriprava za glavni del postopka, Panjerjevo rekurzijo.

2.1 Ekvidistantna diskretizacija

Pri postopku diskretizacije bomo nenegativno zvezno slučajno spremenljivko X nadomestili z njej čim bolj podobno diskretno slučajno spremenljivko X_d. Za nas bo to pomembno pri škodni intenzivnosti, ki jo navadno aproksimiramo z zveznimi slučajnimi spremenljivkami, pri računanju agregatnih odškodnin pa jo bomo potrebovali v diskretizirani obliki. Za začetek moramo določiti korak h. Za natančnost je sicer zaželeno, da je h čim manjši, po drugi strani pa se bo to poznalo v večji časovni zahtevnosti postopka diskretizacije, predvsem pa postopka rekurzije, kjer bomo diskretizirano slučajno spremenljivko potrebovali. V naših primerih bomo uporabili $h = 1$ in $h = 10$, kar predstavlja eno oziroma deset denarnih enot. Poleg tega moramo določiti tudi nek mnogokratnik $x_{max} = rh$ našega koraka, ki bo služil kot največja možna vrednost naše slučajne spremenljivke. Ta mora biti izbran tako, da bo $F(x_{max})$ dovolj blizu 1, kjer je F porazdelitvena funkcija slučajne spremenljivke X. Sedaj se moramo odločiti le še, kako bomo verjetnosti iz porazdelitvene funkcije dodeljevali točkam $kh,\ k = 1, 2, ..., r$. Najbolj preprosti opciji sta, da celotno verjetnost intervala $[kh, (k+1)h]$ dodelimo bodisi levemu bodisi desnemu krajišču, torej $f_k = P(X_d = kh) = F(kh + h) - F(kh)$ ali $f_k = F(kh) - F(kh - h)$. Edina posebnost pri tem je verjetnost f_r, ki ji v obeh primerih dodelimo verjetnost desno od nje torej $1 - F(rh)$, v primeru, ko dodeljujemo verjetnosti v desno krajišče pa še $F(rh) - F(rh - h)$. Pri tem smo seveda zavestno naredili napako, da smo upanje slučajne spremenljivke povečali ali zmanjšali. Nekoliko boljša je zato metoda zaokroževanja, torej $f_k = F(kh + \frac{h}{2}) - F(kh - \frac{h}{2})$, ki jo bomo uporabili tudi mi.

Vendar tudi tu se matematično upanje ne ohrani, zato obstaja tudi tako imenovana nepristranska metoda, ki ohranja prispevek intervala k $E[X]$. V podrobnosti se v tem delu ne bomo spuščali, zainteresirani bralec pa več o tej metodi lahko najde v [8].

2.2 Panjerjeva rekurzija

Panjerjeva rekurzija je eden izmed pomembnejših matematičnih postopkov v aktuarstvu, saj omogoča učinkovit izračun porazdelitve nekaterih sestavljenih slučajnih spremenljivk, ki pogosto predstavljajo porazdelitev agregatnih škod. Za slučajno spremenljivko X označimo s p_k verjetnost $P(X = k)$, kjer je $k \in \mathbb{N}_0$. Osnova rekurzije je družina slučajnih spremenljivk z lastnostjo

$$p_k = p_{k-1}\left(a + \frac{b}{k}\right)$$

za neki realni števili a in b. Mednje spadajo naslednji tipi slučajnih spremenljivk s pripadajočimi rodovnimi funkcijami $G_X = E[t^X] = \sum_{k=0}^{\infty} p_k t^k$, ki jih bomo potrebovali kasneje:

1. Poissonova porazdelitev:

$$p_k = \frac{e^{-\lambda}\lambda^k}{k!},\ k = 0, 1, 2, ...$$

$$\text{Ker je } \frac{p_k}{p_{k-1}} = \frac{\lambda}{k},\ \text{vzamemo } a = 0,\ b = \lambda.$$

$$G_N(t) = e^{\lambda(t-1)}$$

2. Binomska porazdelitev:

$$p_k = \binom{n}{k} p^k (1-p)^{n-k},\ k = 0, 1, 2, ..., n$$

$$\text{Ker je } \frac{p_k}{p_{k-1}} = \frac{(n-k+1)p}{k(1-p)},\ \text{vzamemo } a = -\frac{p}{1-p},\ b = \frac{(n+1)p}{1-p}.$$

$$G_N(t) = (pt + (1-p))^n$$

3. Negativna binomska porazdelitev:

$$p_k = \binom{\alpha + k - 1}{k} p^k (1-p)^{\alpha},\ k = 0, 1, 2, ...$$

$$\text{Ker je } \frac{p_k}{p_{k-1}} = \frac{(\alpha + k - 1)p}{k},\ \text{vzamemo } a = p,\ b = (\alpha - 1)p.$$

$$G_N(t) = \left(\frac{p}{1-(1-p)t}\right)^{\alpha}$$

Spomnimo se še, da med omenjene tipe sodi tudi geometrijska porazdelitev kot poseben primer negativne binomske z $\alpha = 1$. Da se pokazati, da so to tudi edini tipi, ki sodijo v to družino ([12]).

Naj bo sedaj $S = \sum_{i=1}^{N} X_i$ agregatna škoda, kjer je N naključno število škod, X_i pa so diskretne neodvisne in enako porazdeljene posamezne škode z ekvidistantnimi vrednostmi, ki so poleg tega neodvisne tudi od N. Naj $f_k = P(X = kh)$ za $k \in \mathbb{N}_0$ predstavlja verjetnostno funkcijo X_i, p_k pa verjetnostno funkcijo N. Ker škode navadno aproksimiramo z zveznimi porazdelitvami, dobimo diskretne škode s pomočjo diskretizacije. Verjetnostna funkcija f_k^{*n} slučajne spremenljivke $S_n = \sum_{i=1}^{n} X_i$ se imenuje konvolucija. Zanjo velja rekurzivna formula

$$\begin{aligned} f_k^{*0} &= \begin{cases} 1, & k = 0; \\ 0, & k = 1, 2, 3, ... \end{cases} \\ f_k^{*n} &= \sum_{j=0}^{k} f_{k-j}^{*(n-1)} f_j, n = 1, 2, 3, ..., \ k = 0, 1, 2, ... \end{aligned}$$

Verjetnostno funkcijo slučajne spremenljivke S sedaj dobimo po formuli o popolni verjetnosti:

$$\begin{aligned} g_k &= P(S = kh) = \sum_{n=0}^{\infty} P(N = n) P\left(\sum_{i=1}^{n} X_i = kh\right) \qquad (2.1) \\ &= \sum_{n=0}^{\infty} p_n f_k^{*n}, \ k = 0, 1, 2, ... \end{aligned}$$

Sedaj opazimo, da je zaradi enake porazdeljenosti slučajnih spremenljivk $E[X_1|S_n = kh] = E[X_2|S_n = kh] = \cdots = E[X_n|S_n = kh] = \frac{kh}{n}$. Po drugi strani pa dobimo

$$\frac{kh}{n} = E[X_1|S_n = kh] = \frac{\sum_{j=0}^{k} jhP[X_1 = jh]P[S_{n-1} = (k-j)h]}{P[S_n = kh]} = \frac{\sum_{j=0}^{k} jhf_{k-j}^{*(n-1)} f_j}{f_k^{*n}},$$

od koder lahko izrazimo

$$f_k^{*n} = \frac{n}{k} \sum_{j=1}^{k} j f_{k-j}^{*(n-1)} f_j. \qquad (2.2)$$

To vstavimo v enačbo (2.1):

$$g_k = \sum_{n=0}^{\infty} p_n f_k^{*n} = p_0 f_k^{*0} + \sum_{n=1}^{\infty} \left(a + \frac{b}{n}\right) p_{n-1} f_k^{*n}, \ k = 0, 1, 2, ...$$

Če upoštevamo še rekurzivno zvezo za konvolucijo in enačbo (2.2), za $k \in \mathbb{N}$ velja

$$\begin{aligned}
g_k &= \sum_{n=1}^{\infty}\left(a+\frac{b}{n}\right)p_{n-1}f_k^{*n} \\
&= \sum_{n=1}^{\infty} a p_{n-1}\sum_{j=0}^{k} f_{k-j}^{*(n-1)} f_j + \sum_{n=1}^{\infty}\frac{b}{k}p_{n-1}\sum_{j=1}^{k} j f_{k-j}^{*(n-1)} f_j \\
&= \sum_{j=0}^{k} a f_j \sum_{n=1}^{\infty} p_{n-1} f_{k-j}^{*(n-1)} + \sum_{j=1}^{k}\frac{jb}{k} f_j \sum_{n=1}^{\infty} p_{n-1} f_{k-j}^{*(n-1)} \\
&= a f_0 \sum_{n=1}^{\infty} p_{n-1} f_k^{*(n-1)} + \sum_{j=1}^{k}\left(a+\frac{jb}{k}\right) f_j \sum_{n=1}^{\infty} p_{n-1} f_{k-j}^{*(n-1)} \\
&= a f_0 g_k + \sum_{j=1}^{k}\left(a+\frac{jb}{k}\right) f_j g_{k-j}.
\end{aligned}$$

Od tu dobimo Panjerjevo rekurzijsko zvezo

$$g_k = \frac{1}{1-af_0}\sum_{j=1}^{k}\left(a+\frac{jb}{k}\right) f_j g_{k-j},\ \ k = 1, 2, 3, ...$$

Manjkajo nam samo še začetne verjetnosti. Definirajmo najprej rodovno funkcijo za diskretno slučajno spremenljivko X, porazdeljeno na ekvidistantnih točkah z verjetnostno funkcijo $f_k = P(X = kh)$, $k \geq 0$. Rodovna funkcija ima obliko $G_X(t) = E[t^X] = \sum_{k=0}^{\infty} f_k t^{kh}$. Pri tem za izraz 0^0, ki nastopa v prvem členu pri $G_X(0)$, vzamemo vrednost 1, kar nam da $G_X(0) = f_0$. Poleg tega za slučajno spremenljivko S velja enakost

$$E[t^S|N=n] = E[t^{\sum_{i=1}^{N} X_i}|N=n] = E[t^{\sum_{i=1}^{n} X_i}] = E[t^{X_1}]E[t^{X_2}]\cdots E[t^{X_n}] = (E[t^X])^n,$$

kjer smo na predzadnjem koraku upoštevali neodvisnost X_i. To nam da $E[t^S|N] = (E[t^X])^N$. Sedaj lahko pokažemo povezavo med rodovnimi funkcijami spremenljivk S, X in N:

$$G_S(t) = E[t^S] = E[E[t^S|N]] = E[(E[t^X])^N] = E[(G_X(t))^N] = G_N(G_X(t)).$$

Ker je $f_0 = G_X(0)$, je $G_S(0) = G_N(G_X(0)) = G_N(f_0)$, kar nam da

1. za Poissonovo porazdelitev
$$g_0 = e^{\lambda(f_0-1)},$$

2. za binomsko porazdelitev
$$g_0 = (pf_0 + (1-p))^n,$$

3. in za negativno binomsko porazdelitev

$$g_0 = \left(\frac{p}{1 - (1-p) f_0} \right)^{\alpha}.$$

Tako dobljen algoritem ima za računanje vrednosti $g_0, g_1, ..., g_m$ časovno zahtevnost $O(m^2)$, kar je za en red bolje, kot če bi kar neposredno uporabili enačbo (2.1), in nam omogoča izračune v razumnem času tudi pri primerih z nekoliko večjimi številkami.

Poglavje 3

Premijski principi in sloji tveganja

3.1 Lastnosti premijskih principov

Naj nenegativna[1] slučajna spremenljivka X predstavlja škodo, ki jo doživi nek posameznik. Da bi se izognil negotovosti in morebitni visoki škodi, bi se rad zavaroval pri zavarovalnici, kjer zaradi enostavnosti predpostavimo, da bo odškodnina kar enaka škodi, torej X. V nadaljevanju bomo slučajni spremenljivki X večkrat rekli tudi tveganje, s čimer poudarjamo, da do škode morda sploh ne bo prišlo. Zavarovalnica za sprejetje tveganja v zavarovanje seveda želi določeno plačilo, premijo. Tudi tu si stvari poenostavimo in se pretvarjamo, da je edini strošek zavarovalnice plačilo odškodnine, obravnavamo tako imenovano *tehnično premijo*. Ta je višja od matematičnega upanja škode, $E[X]$, saj le to zavarovalnici omogoča profit in tudi dolgoročno solventnost. Zato tehnično premijo delimo še na dva dela, *nevarnostno premijo*, ki je enaka $E[X]$, in *varnostni dodatek*. *Premijski princip* π je neka funkcija škode X, ki tej škodi priredi tehnično premijo. V nekaterih primerih je varnostni dodatek že v osnovni izražavi jasno razviden, kot je recimo tudi v naslednjem primeru.

Primer 3.1 (Varianční premijski princip).

$$\pi(X) = E[X] + \alpha \,\mathrm{Var}[X], \;\; \alpha > 0$$

Varnostni dodatek je zgoraj kar linearno odvisen od variance. S tem smo premijo določili na podlagi prvih dveh momentov škode X, ki pa o naši spremenljivki še ne povesta vsega, zato ta premijski princip ne more dobro ovrednotiti nevarnosti posameznih škod. Kljub temu je variančni premijski princip eden izmed pogosteje uporabljenih v praksi, predvsem zaradi svoje preprostosti. Poglejmo si še nekoliko bolj zapleten primer, kjer varnostni dodatek ne bo eksplicitno izražen, seveda pa ga še vedno lahko izračunamo kot razliko med tehnično in nevarnostno premijo.

Primer 3.2 (Premijski princip funkcije koristnosti). Posameznikov odnos do tveganja bomo jasneje izrazili s pomočjo funkcije koristnosti. To je funkcija $u(x)$, ki

[1] Nenegativnost X velja v celotnem delu, zato je v nadaljevanju ne bomo posebej poudarjali.

poljubnemu premoženju x priredi koristnost, ki jo posameznik pripisuje temu premoženju. Zanjo navadno predpostavimo, da je naraščajoča in konkavna, kar pomeni, da ima posameznik večjo koristnost od večjega premoženja, se pa prirastek koristnosti za dodatno enoto premoženja manjša z velikostjo le-tega. Funkcija koristnosti nam pomaga tako, da predpostavimo, da posameznik vedno želi maksimizirati pričakovano koristnost $E[u(X)]$, torej ko ima na voljo več možnosti, se vedno odloči za tisto z največjo pričakovano koristnostjo. Na ta način smo med slučajne spremenljivke vpeljali urejenost, in sicer $X \preceq Y$ tedaj, ko je $E[u(X)] \leq E[u(Y)]$. Če funkciji koristnosti dodamo neko konstanto, se tako vpeljana urejenost slučajnih spremenljivk ne bo spremenila, torej lahko izberemo tako, ki gre skozi izhodišče. Posameznik se bo za zavarovanje odločil, ko bo njegova pričakovana koristnost vsaj tolikšna kot brez njega, torej vsaj 0. Ker zavarovalnica želi čim večjo premijo, mu bo zaračunala toliko, da bo njegova koristnost natanko 0, saj s plačano premijo pričakovana koristnost pada. Pri premijskem principu funkcije koristnosti tehnično premijo $\pi_u(X)$ tako izračunamo kot rešitev enačbe

$$E\left[u\left(X-\pi_u(X)\right)\right]=0.$$

Tudi ta premijski princip ima svoje pomanjkljivosti, saj je funkcije koristnosti težko določiti, poleg tega pa bi posameznikom z različnimi funkcijami koristnosti zaračunali različne cene, tudi če so enako tvegani. Dodatno smo zgoraj predpostavili, da imajo vsi posamezniki enako začetno premoženje 0, kar v praksi seveda ne drži. S tem, ko posameznemu tveganju priredimo tehnično premijo, torej natanko določeno vrednost, smo implicitno uvedli urejenost med tveganji. Tveganja z manjšo premijo so z vidika premijskega principa manj tvegana kot tista z večjimi. Obstajajo pa tudi delne ureditve tveganj, dve od njih bomo definirali na tem mestu, in za premijski princip bi si želeli, da bi se pripadajoča urejenost ujemala z njima. Še prej pa definirajmo pojem, ki bo imel eno izmed ključnih vlog v tem delu. Naj bo X slučajna spremenljivka. *Preživetvena funkcija* $S_X : \mathbb{R} \to [0,1]$ je definirana s predpisom

$$S_X(t) = P(X > t).$$

Ker je porazdelitvena funkcija slučajne spremenljivke X definirana kot $F_X(t) = P(X \leq t)$, imamo torej $S_X(t) = 1 - F_X(t)$.

Definicija 3.3. Slučajna spremenljivka Y dominira slučajno spremenljivko X v smislu prvega reda stohastične dominance, $Y \succ_{1st} X$, če velja $S_X(t) \leq S_Y(t)$ za vsak $t \in \mathbb{R}$.

Definicija 3.4. Slučajna spremenljivka X je manj nevarna od slučajne spremenljivke Y, $X \prec_D Y$, če velja $E[X] \leq E[Y]$ in obstaja tak $t_0 \in \mathbb{R}$, da velja

$$S_X(t) \geq S_Y(t), \text{ za } t < t_0,$$

$$S_X(t) \leq S_Y(t), \text{ za } t \geq t_0.$$

Definicija 3.5. Slučajna spremenljivka Y dominira slučajno spremenljivko X v smislu drugega reda stohastične dominance (ali stop-loss urejenosti), $Y \succ_{2nd} X$, če velja kakšen izmed naslednjih dveh ekvivalentnih pogojev (dokaz ekvivalentnosti v [7]):

1. Obstajajo take slučajne spremenljivke $U_1, U_2, ..., U_n$, da velja

$$X \prec_D U_1,\ U_1 \prec_D U_2, ...,\ U_n \prec_D Y.$$

2. $$\int_x^\infty S_X(t)dt \leq \int_x^\infty S_Y(t)dt, \text{ za vse } x \geq 0.$$

Kot smo videli že v primerih, je dober premijski princip težko izbrati. Za premijski princip $\pi : L^1(P) \to \mathbb{R}$ želimo, da bi imel naslednje lastnosti:

1. *Pozitivnost varnostnega dodatka:* $\pi(X) \geq E[X]$ za vse X;
2. *Odsotnost neupravičenega varnostnega dodatka:* $\pi(X) = c$ za X identično enak konstanti c;
3. *Omejenost z zgornjo mejo:* $\pi(X) \leq \operatorname{ess\,sup}(X)$ za vse X;
4. *Translacijska invarianca:* $\pi(X + c) = \pi(X) + c$ za vse X in $c \in \mathbb{R}_+$;
5. *Invarianca raztega:* $\pi(bX) = b\pi(X)$ za vse X in vse $b \geq 0$;
6. *Subaditivnost:* $\pi(X + Y) \leq \pi(X) + \pi(Y)$ za vse pare slučajnih spremenljivk X in Y;
7. *Aditivnost za neodvisna tveganja:* $\pi(X + Y) = \pi(X) + \pi(Y)$ za vse pare neodvisnih slučajnih spremenljivk X in Y;
8. *Dodatek za negotovost parametra* $E_\Theta[\pi(X|\Theta)] \leq \pi(X)$ za vse pare slučajnih spremenljivk Θ in X, kjer je Θ nek parameter porazdelitve X;
9. *Monotonost glede na stohastično urejenost prvega reda:* Iz $X \prec_{1st} Y$ sledi $\pi(X) \leq \pi(Y)$.
10. *Monotonost glede na stohastično urejenost drugega reda:* Iz $X \prec_{2nd} Y$ sledi $\pi(X) \leq \pi(Y)$.

Vsaj prve štiri lastnosti je gotovo smiselno zahtevati. Poglejmo si sedaj zelo priljubljen variančni premijski princip in za bolj enostavne lastnosti preverimo, ali jih ima.

Primer 3.6 (Lastnosti variančnega premijskega principa)**.**

1. Pozitivnost varnostnega dodatka: Variančni premijski princip ima pozitiven varnostni dodatek, saj velja
$$\pi(X) = E[X] + \alpha \operatorname{Var}[X] \geq E[X].$$

2. Odsotnost neupravičenega dodatka: Za $X = c$ je $\operatorname{Var}[X] = 0$, torej velja $\pi(X) = E[X] = c$.

3. Omejenost z zgornjo mejo: Za poljuben $\alpha > 0$ variančni premijski princip ni omejen z zgornjo mejo. Pokažimo to s protiprimerom. Poglejmo si enakomerno zvezno porazdeljeno slučajno spremenljivko X na intervalu $(0, b)$. Ker velja $E[X] = \frac{b}{2}$ in $\operatorname{Var}[X] = \frac{b^2}{12}$, je $\pi(X) = \frac{b}{2} + \alpha\frac{b^2}{12}$. Pri danem $\alpha > 0$ izberemo tak $b > 0$, da je $\alpha > \frac{6}{b}$. Potem je
$$\pi(X) = \frac{b}{2} + \alpha\frac{b^2}{12} > \frac{b}{2} + \frac{6}{b} \cdot \frac{b^2}{12} = b = \operatorname{ess\,sup}(X).$$

4. Translacijska invarianca: Ker za varianco velja $\operatorname{Var}[X + c] = \operatorname{Var}[X]$ za poljuben $c \in \mathbb{R}$, imamo
$$\pi(X + c) = E[X + c] + \alpha \operatorname{Var}[X + c] = E[X] + \alpha \operatorname{Var}[X] + c = \pi(X) + c.$$

5. Invarianca raztega: Ker za varianco velja $\operatorname{Var}[bX] = b^2 \operatorname{Var}[X]$ za poljuben $b \in \mathbb{R}$, dobimo
$$\pi(bX) = bE[X] + b^2\alpha \operatorname{Var}[X] \neq bE[X] + b\alpha \operatorname{Var}[X] = b\pi(X),$$
torej variančni princip ni invarianten za razteg.

6. Subaditivnost: Variančni premijski princip ni subaditiven. Ker bi relacija $\pi(X + Y) = \pi(X) + \pi(Y)$ v nasprotnem primeru morala veljati za poljuben par slučajnih spremenljivk X in Y, bi morala veljati tudi v primeru $X = Y$. V tem primeru pa vemo, da je
$$\pi(X + X) = 2E[X] + 4\alpha \operatorname{Var}[X] > 2E[X] + 2\alpha \operatorname{Var}[X] = \pi(X) + \pi(X)$$
za poljubno slučajno spremenljivko X, različno od konstante.

7. Aditivnost za neodvisna tveganja: Za neodvisni tveganji X in Y velja $\operatorname{Var}[X + Y] = \operatorname{Var}[X] + \operatorname{Var}[Y]$. To nam da
$$\pi(X + Y) = E[X] + E[Y] + \alpha \operatorname{Var}[X] + \alpha \operatorname{Var}[Y] = \pi(X) + \pi(Y),$$
torej je variančni premijski princip aditiven za neodvisna tveganja.

V zgornjem primeru smo videli, da pri variančnem premijskem principu lahko pride do tega, da zavarovancu zaračunamo višjo premijo od največje možne škode. To seveda nima smisla, saj se pod takimi pogoji ne bi nihče zavaroval.

3.2 Lastnosti slojev tveganja

Preživetvena funkcija tako kot porazdelitvena natanko določa porazdelitev, naslednja trditev pa je eden izmed razlogov, da se bomo v tem delu osredotočili predvsem na preživetveno funkcijo.

Trditev 3.7. *Za nenegativno slučajno spremenljivko X velja*

$$E[X] = \int_0^\infty S_X(t)dt.$$

Dokaz. Dokaz bomo naredili samo za zvezne in diskretne slučajne spremenljivke. Pri zveznih slučajnih spremenljivkah z uporabo Fubinijevega izreka dobimo

$$E[X] = \int_0^\infty x\ dF(x) = \int_0^\infty \int_0^x dt\ dF(x) = \int_0^\infty \int_t^\infty dF(x)dt = \int_0^\infty S(t)dt.$$

Dokažimo sedaj še za diskretne slučajne spremenljivke. Naj bodo $x_0, x_1, x_2, ...$ možne vrednosti, ki jih lahko zavzame slučajna spremenljivka X. Pri tem naj bo x_0 enaka 0, tudi če je X ne more zavzeti. Matematično upanje sedaj lahko zapišemo kot

$$\begin{aligned}
E[X] &= x_0 P(X = x_0) + x_1 P(X = x_1) + x_2 P(X = x_2) + \cdots \\
&= x_0 \left(P(X = x_0) + P(X = x_1) + P(X = x_2) + \cdots\right) \\
&+ (x_1 - x_0) \left(P(X = x_1) + P(X = x_2) + P(X = x_3) + \cdots\right) \\
&+ (x_2 - x_1) \left(P(X = x_2) + P(X = x_3) + P(X = x_4) + \cdots\right) \\
&+ (x_3 - x_2) \left(P(X = x_3) + P(X = x_4) + P(X = x_5) + \cdots\right) \\
&\vdots \\
&= \sum_{j=1}^{\infty} (x_j - x_{j-1}) P(X > x_{j-1}) \\
&= \int_0^\infty S_X(x)dx.
\end{aligned}$$

Pri tem smo v zadnjem koraku upoštevali posebno stopničasto obliko preživetvene funkcije in zveznost z desne. □

Poglejmo si sedaj, kako izgleda slučajna spremenljivka pri zavarovanju z odbitno franšizo in maksimalnim kritjem. To je zavarovanje, kjer zavarovalnica plača samo del škode, ki je večji od odbitne franšize, v primeru, da je škoda manjša od maksimalnega kritja, sicer pa razliko med maksimalnim kritjem in odbitno franšizo. Tako obliko srečamo tudi pri škodnem presežkovnem pozavarovanju (*angl. excess of loss*), kjer pozavarovatelj krije natanko del škode med dvema vrednostma. Spodnji meji pravimo *prioriteta*, širini pasu, ki ga krije pogodba, pa *limit*.

Definicija 3.8. *Sloj* $I_{(a,a+h]}(X)$ tveganja X je izguba pozavarovatelja pri škodno presežkovnem pozavarovanju

$$I_{(a,a+h]}(X) = \begin{cases} 0, & 0 \leq X < a, \\ X - a, & a \leq X < a + h, \\ h, & a + h \leq X. \end{cases}$$

Ko je v obravnavi le eno tveganje, uporabljamo krajšo oznako $I_{(a,a+h]}$.

Trditev 3.9. *Preživetvena funkcija za sloj* $I_{(a,a+h]}$ *je oblike*

$$S_{I_{(a,a+h]}}(t) = \begin{cases} S_X(a+t), & t < h, \\ 0, & t \geq h, \end{cases} \tag{3.1}$$

njegova nevarnostna premija pa je enaka

$$E[I_{(a,a+h]}] = \int_a^{a+h} S_X(t)dt.$$

Dokaz. Iz definicije $I_{(a,a+h]}$ takoj vidimo, da velja $S_{I_{(a,a+h]}}(t) = 0$ za $t \geq h$, saj $I_{(a,a+h]}$ ne more biti večji od h. Prav tako pa za $t < h$ velja

$$S_{I_{(a,a+h]}}(t) = P(I_{(a,a+h]} > t) = P(X - a > t) = P(X > a + t) = S_X(a + t).$$

Pokažimo sedaj še drugo enakost:

$$E[I_{(a,a+h]}] = \int_0^\infty S_{I_{(a,a+h]}}(t)dt = \int_0^h S_X(a+t)dt = \int_a^{a+h} S_X(t)dt.$$

□

Kot vidimo, je $S_X(t)dt$ nevarnostna premija za infinitezimalni sloj $I_{(t,t+dt]}$, zato lahko rečemo, da je $S_X(t)$ kar gostota nevarnostne premije sloja. Naša naloga bo, da poiščemo tehnično premijo tveganja X in posameznega njegovega sloja $I_{(a,b]}$.

3.3 Urejenost tveganj

Za dva sloja $I_{(a,a+h]}$ in $I_{(b,b+h]}$, $a < b$, istega tveganja X velja $S_X(a+t) \geq S_X(b+t)$ za $t \geq 0$, zato je $S_{I_{(a,a+h]}}(t) \geq S_{I_{(b,b+h]}}(t)$, torej $I_{(b,b+h]} \prec_{1st} I_{(a,a+h]}$. Za premijski princip $\pi : X \mapsto [0, \infty)$, ki je monoton glede na stohastično urejenost prvega reda, zato za $a < b$ velja

$$\pi(I_{(b,b+h]}) \leq \pi(I_{(a,a+h]}).$$

Pri konstantnem limitu mora torej za ohranitev stohastične urejenosti prvega reda premija padati z višino prioritete. Poglejmo si še, kakšne so zahteve pri stohastični urejenosti drugega reda. Naj bo spet $a < b$ in naj bosta h_1 in h_2 taka, da bo

$E[I_{(a,a+h_1]}] = E[I_{(b,b+h_2]}]$. Od prej vemo, da velja $S_X(a+h) \geq S_X(b+h)$ za vsak h, po drugi strani pa lahko matematični upanji izrazimo kot

$$E[I_{(a,a+h_1]}] = \int_a^{a+h_1} S_X(t)dt = \int_b^{b+h_2} S_X(t)dt = E[I_{(b,b+h_2]}].$$

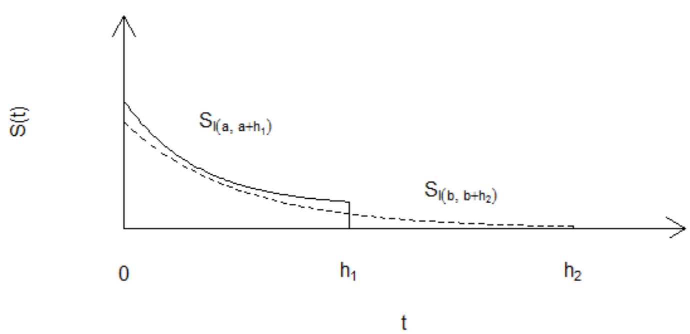
Iz tega zapisa lahko zaključimo, da je $h_1 \leq h_2$. Če se spomnimo na povezavo (3.1) med preživetvenimi funkcijami slojev in preživetveno funkcijo tveganja, dobimo, da je $S_{I_{(a,a+h_1]}}(t) \geq S_{I_{(b,b+h_2]}}(t)$ za $t < h_1$. Za $t > h_1$ pa je $S_{I_{(a,a+h_1]}}(t) = 0 \leq S_{I_{(b,b+h_2]}}(t)$. Situacija je nazorno prikazana na sliki 3.1. Pokazali smo, da je $I_{(a,a+h]} \prec_D I_{(b,b+h]}$. Za premijski princip $\pi : X \mapsto [0,\infty)$, monoton glede na stohastično urejenost drugega reda, torej velja

$$\pi(I_{(a,a+h_1]}) \leq \pi(I_{(b,b+h_2]}),$$

od koder sledi

$$\frac{\pi(I_{(a,a+h_1]})}{E[I_{(a,a+h_1]}]} \leq \frac{\pi(I_{(b,b+h_2]})}{E[I_{(b,b+h_2]}]}.$$

Količini $\frac{\pi(\cdot)}{E[\cdot]}$ pravimo *relativni dodatek*. Višji sloji morajo torej imeti večji relativni dodatek.



Slika 3.1: Sloja z enako pričakovano izgubo

3.4 Komonotonost

Definicija 3.10. Slučajni spremenljivki X in Y na verjetnostnem prostoru $(\Omega, \mathcal{F}, P)$ sta komonotoni tedaj, ko neenakost

$$[X(\omega_1) - X(\omega_2)][Y(\omega_1) - Y(\omega_2)] \geq 0$$

drži skoraj za vse ω_1 in ω_2 iz Ω.

Trditev 3.11. *Slučajni spremenljivki X in Y sta komonotoni natanko tedaj, ko obstajajo taka slučajna spremenljivka Z ter taki naraščajoči funkciji f in g, da je $X = f(Z)$ in $Y = g(Z)$.*

Dokaz. ($\Leftarrow$) Naj bosta ω_1, ω_2 poljubni. Brez škode za splošnost smemo predpostaviti, da velja $Z(\omega_1) \leq Z(\omega_2)$. Ker sta f in g naraščajoči, velja tudi $X(\omega_1) \leq X(\omega_2)$ ter $Y(\omega_1) \leq Y(\omega_2)$. To pa pomeni, da velja

$$[X(\omega_1) - X(\omega_2)][Y(\omega_1) - Y(\omega_2)] \geq 0$$

skoraj gotovo.
($\Rightarrow$) Definirajmo $Z = X$, torej vzamemo $f(x) = x$, ki je naraščajoča funkcija. Definirajmo funkcijo g kot $g(Z(\omega)) = Y(\omega)$. Pokazati moramo še, da je g naraščajoča. Naj bosta ω_1 in ω_2 poljubni takšni, da je $X(\omega_1) \leq X(\omega_2)$. Če velja enakost, potem je

$$Y(\omega_1) = g(X(\omega_1)) = g(X(\omega_2)) = Y(\omega_2).$$

Sicer pa velja $X(\omega_1) < X(\omega_2)$. Ker je po predpostavki

$$[X(\omega_1) - X(\omega_2)][Y(\omega_1) - Y(\omega_2)] \geq 0,$$

mora veljati

$$g(X(\omega_1)) = Y(\omega_1) \leq Y(\omega_2) = g(X(\omega_2)),$$

torej je g res naraščajoča. □

Komonotoni tveganji se vedno gibljeta v isto smer, zato zavarovalnica s hkratnim sprejetjem obeh v zavarovanje ne more pričakovati, da se bo izid ene izravnal z izidom druge. Zato je smiselno predpostaviti $\pi(X + Y) \geq \pi(X) + \pi(Y)$ za komonotoni tveganji X in Y. Vendar pa zavarovanec lahko kupi ločeni zavarovanji, torej je smiselno tudi, da velja subaditivnost $\pi(X+Y) \leq \pi(X)+\pi(Y)$, kar nam da aditivnost za komonotona tveganja $\pi(X + Y) = \pi(X) + \pi(Y)$. Iz trditve 3.11 je jasno, da so različni sloji istega tveganja X komonotoni, saj so naraščajoče funkcije X. Če torej vpeljemo delitev $0 = x_0 < x_1 < ... < x_n < ...$, mora veljati

$$\pi(X) = \sum_{i=1}^{\infty} \pi(I_{(x_{i-1},x_i]}).$$

Premija za celotno tveganje mora biti vsota vseh slojev, ki skupaj ravno pokrijejo celotno realno os.

Poglavje 4

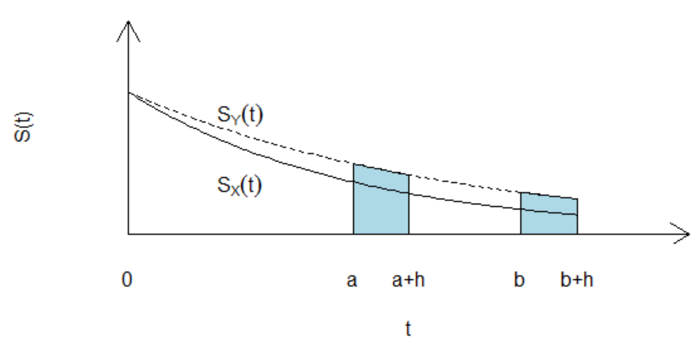
Transformacija preživetvene funkcije

4.1 Lastnosti transformacijske funkcije

Opazili smo, da $S_X(t)$ lahko obravnavamo kot gostoto nevarnostne premije sloja v smislu, da nevarnostno premijo sloja dobimo z integracijo $S_X(t)$ med njegovima mejama. To nas napelje na idejo, da bi tehnično, za tveganje prilagojeno premijo, lahko dobili s transformacijo $S_X(t)$:

$$S_Y(t) = g[S_X(t)],$$

kjer je $g : [0, 1] \to \mathbb{R}$ primerna funkcija. $S_Y(t)$ sedaj gledamo kot našo novo gostoto nevarnostne premije sloja. Premijski princip dobimo tako, da integriramo funkcijo $S_Y(t)$. Poglejmo si, kaj moramo od g zahtevati, da bi dobili smiseln premijski princip $\pi(X) = \int_0^\infty S_Y(t)dt$.



Slika 4.1: Transformacija preživetvene funkcije

1. Definirana mora biti za vsa števila med vključno 0 in 1 in tam imeti nenegativno vrednosti. V nasprotnem primeru bi lahko dobili sloj z negativno premijo.

2. Ker je za ničelno tveganje $X = 0$ $S_X(t)$ enaka 0 za vse $t \geq 0$, mora biti $g(0) = 0$, sicer bi za ničelno tveganje dobili kar neskončno vrednost.

3. Funkcija g mora biti naraščajoča. Če ne bi bil izpolnjen ta pogoj, bi lahko dobili višji sloj z višjo premijo od nižjega sloja z enakim limitom, kar pa ni smiselno, saj ima zgornji sloj lahko pozitivno vrednost samo v primeru, da ima pozitivno vrednost nižji sloj in je ta vrednost vedno manjša od tiste spodnjega sloja. Ta pogoj je tudi potreben za monotonost glede na stohastično urejenost prvega reda.

4. Za ohranitev stohastične ureditve drugega reda pa mora z višino prioritete naraščati relativni dodatek za infinitezimalni sloj $(t, t+dt]$. Ta je enak
$$\frac{g[S_X(t)]}{S_X(t)} = \frac{g(u)}{u} = \frac{g(u)-0}{u-0}.$$
Ker $S_X(t)$ pada s t, se mora zgornji izraz s t zmanjševati. To se zgodi, če je g konkavna funkcija.

5. Naj bo $X = c$. Potem velja $S_X(t) = 1$ za $t < c$ in $S_X(t) = 0$ za $t \geq c$. Matematično upanje transformiranke $\pi(X)$ je torej enako ploščini pravokotnika, ki ima eno stranico dolgo c, drugo pa $g(1)$. Če želimo, da bo $\pi(X) = c$, moramo zahtevati $g(1) = 1$.

Če so izpolnjeni zgornji pogoji, potem je $g[S_X(t)]$ padajoča, z desne zvezna funkcija, ki slika na interval $[0, 1]$, torej predstavlja preživetveno funkcijo neke slučajne spremenljivke Y.

Definicija 4.1. Za vsako naraščajočo konkavno funkcijo z $g(0) = 0$ in $g(1) = 1$ naj bo pripadajoči premijski princip enak
$$\pi(X) = \int_0^\infty g[S_X(t)]dt. \tag{4.1}$$

Trditev 4.2. *Zgoraj definirani premijski princip ima naslednje lastnosti:*

1. *Pozitivnost varnostnega dodatka;*

2. *Odsotnost neupravičenega varnostnega dodatka;*

3. *Omejenost z zgornjo mejo;*

4. *Translacijska invarianca;*

5. *Invarianca raztega;*

6. *Aditivnost slojev;*

7. *Monotonost glede na stohastično urejenost prvega reda.*

Dokaz. 1. *Pozitivnost varnostnega dodatka:* Za vsako konkavno funkcijo z $g(0) = 0$ in $g(1) = 1$ je jasno, da leži na $[0, 1]$ nad premico $y = x$, zato velja $S_X(t) \leq g[S_X(t)]$ za vsak t.

$$E[X] = \int_0^\infty S_X(t)dt \leq \int_0^\infty g[S_X(t)]dt = \pi(X).$$

2. *Odsotnost neupravičenega varnostnega dodatka:* Naj bo $X = c$ skoraj gotovo. Potem velja $E[X] = c$ in

$$S_X(t) = \begin{cases} 1, & x < c; \\ 0, & x \geq c. \end{cases}$$

Od tu jasno vidimo, da naša funkcija g ne bo spremenila preživetvene funkcije, zato je $\pi(X) = c$.

3. *Omejenost z zgornjo mejo*

$$\pi(t) = \int_0^\infty g[S_X(t)]dt = \int_0^{\operatorname{ess\,sup}(X)} g[S_X(t)]dt \leq \int_0^{\operatorname{ess\,sup}(X)} 1dt = \operatorname{ess\,sup}(X)$$

4. *Translacijska invarianca:* Naj bo $Z = X + c$ za nek $c \in \mathbb{R}_+$. Potem je

$$S_Z(t) = P(Z > t) = P(X + c > t) = P(X > t - c) = S_X(t - c).$$

Nadalje se spomnimo še, da je $S_X(t) = 1$ za vse negativne t, saj je X nenegativna. Dobimo

$$\begin{aligned}
\pi(Z) &= \int_0^\infty g[S_Z(t)]dt = \int_0^\infty g[S_X(t - c)]dt \\
&= \int_{-c}^0 g[S_X(t)]dt + \int_0^\infty g[S_X(t)]dt = c + \pi(X).
\end{aligned}$$

5. *Invarianca raztega:* Naj bo $Z = bX$ za nek $b \in \mathbb{R}_+$. Potem je

$$S_Z(t) = P(Z > t) = P(bX > t) = P\left(X > \frac{t}{b}\right) = S_X\left(\frac{t}{b}\right).$$

Za naš premijski princip to pomeni

$$\begin{aligned}
\pi(Z) &= \int_0^\infty g[S_Z(t)]dt = \int_0^\infty g\left[S_X\left(\frac{t}{b}\right)\right]dt \\
&= b\int_0^\infty g[S_X(t)]dt = b\pi(X).
\end{aligned}$$

6. *Aditivnost slojev:* Razdelimo tveganje X z delitvijo $0 = x_0 < x_1 < x_2 < ...$ na sloje $I_{(x_0,x_1]}, I_{(x_1,x_2]}, ...$ Za sloj $I_{(x_i,x_{i+1}]}$ po trditvi 3.9 velja
$$\pi(I_{(x_i,x_{i+1}]}) = \int_{x_i}^{x_{i+1}} g[S_X(t)]dt.$$
Sedaj premije za sloje seštejemo.
$$\sum_{i=0}^{\infty} \pi(I_{(x_i,x_{i+1}]}) = \int_0^{\infty} g[S_X(t)]dt = \pi(X)$$
Vidimo, da so sloji aditivni.

7. *Monotonost glede na stohastično urejenost prvega reda:* Naj bo $X \prec_{1st} Y$. Torej velja $S_X(t) \leq S_Y(t)$ za vsak t. Ker je g naraščajoča, to pomeni $g[S_X(t)] \leq g[S_Y(t)]$. Dobimo
$$\pi(X) = \int_0^{\infty} g[S_X(t)]dt \leq \int_0^{\infty} g[S_Y(t)]dt = \pi(Y).$$

□

4.2 Relativni dodatek v višjih slojih

Še naprej obravnavamo premijski princip
$$\pi(X) = \int_0^{\infty} g[S_X(t)]dt$$
za naraščajočo konkavno funkcijo g z $g(0) = 0$ in $g(1) = 1$. Če vstavimo $u = S_X(t)$, potem je relativni dodatek infinitezimalnega sloja $I_{(t,t+dt]}$ enak
$$\phi(t) = \frac{\pi(I_{(t,t+dt]})}{E[I_{(t,t+dt]}]} = \frac{g[S_X(t)]}{S_X(t)} = \frac{g(u) - g(0)}{u - 0}.$$
Z večanjem t se $u = S_X(t)$ zmanjšuje. Ker je g konkavna, je $\phi(t)$ naraščajoča funkcija t. V višjih slojih je torej relativni dodatek večji. Za odvedljivo funkcijo g je torej $\phi(t)$ naraščajoča, zaradi
$$\lim_{t\to\infty} \phi(t) = \lim_{u\to 0} \frac{g(u) - g(0)}{u - 0} = g'(0),$$
pa je očitno omejena z odvodom g v točki 0. Kaj to sedaj pomeni za visoke sloje? Pričakovana vrednost $E[I_{(t,t+h]}]$ gre proti 0, ko gre t proti ∞. To pomeni, da gre za končen $g'(0)$ tehnična premija proti 0 za visoke sloje, saj je
$$\pi(I_{(t,t+h]}) = \phi(t)E[I_{(t,t+h]}] \leq g'(0)E[I_{(t,t+h]}] \to 0, \text{ ko } t \to \infty.$$
Predvsem pri porazdelitvah s težkim repom je omejitev $\phi(t)$ z $g'(0)$ lahko precej restriktivna, saj imajo visoki sloji lahko zelo majhno matematično upanje, kljub temu pa želimo, da premija ni zanemarljiva. Zato si želimo, da ima funkcija g neskončen odvod v točki 0.

4.3 Monotonost glede na stohastično urejenost drugega reda

Izrek 4.3. *Premijski princip, definiran z* (4.1)*, je monoton glede na stohastično urejenost drugega reda, tj. iz* $X \prec_{2nd} Y$ *sledi* $\pi(X) \leq \pi(Y)$.

Dokaz. Dovolj je pokazati, da π iz (4.1) ohranja relacijo nevarnosti, tj. iz $X \prec_D Y$ sledi $\pi(X) \leq \pi(Y)$. Naj bo torej $E[X] \leq E[Y]$ in naj obstaja taka točka t_0, da je

$$S_X(t) \geq S_Y(t) \text{ za } t < t_0,$$

$$S_X(t) \leq S_Y(t) \text{ za } t \geq t_0.$$

Naj bo Z slučajna spremenljivka s preživetveno funkcijo

$$S_Z(t) = \max\{S_X(t), S_Y(t)\} = \begin{cases} S_X(t), & t < t_0; \\ S_Y(t), & t \geq t_0. \end{cases}$$

Najprej se spomnimo, da iz naraščanja relativnega dodatka in dejstva, da je $S_X(t) \leq S_Y(t)$ za $t \geq t_0$, sledi

$$\frac{g[S_X(t)]}{S_X(t)} \geq \frac{g[S_Y(t_0)]}{S_Y(t_0)}$$

in

$$\frac{g[S_Y(t)]}{S_Y(t)} \geq \frac{g[S_Y(t_0)]}{S_Y(t_0)}.$$

Dobimo

$$\begin{aligned} \pi(Z) - \pi(X) &= \int_{t_0}^{\infty} \left[\frac{g[S_Y(t)]S_Y(t)}{S_Y(t)} - \frac{g[S_X(t)]S_X(t)}{S_X(t)} \right] dt \geq \\ &\geq \frac{g[S_Y(t_0)]}{S_Y(t_0)} \int_{t_0}^{\infty} [S_Y(t) - S_X(t)] dt. \end{aligned} \tag{4.2}$$

Na podoben način izpeljemo tudi neenakost

$$\begin{aligned} \pi(Z) - \pi(Y) &= \int_{0}^{t_0} \left[\frac{g[S_Y(t)]S_Y(t)}{S_Y(t)} - \frac{g[S_X(t)]S_X(t)}{S_X(t)} \right] dt \leq \\ &\leq \frac{g[S_Y(t_0)]}{S_Y(t_0)} \int_{0}^{t_0} [S_X(t) - S_Y(t)] dt. \end{aligned} \tag{4.3}$$

Sedaj odštejemo neenačbi (4.2)-(4.3) in dobimo

$$\pi(Y) - \pi(X) \geq \frac{g[S_Y(t_0)]}{S_Y(t_0)} \int_0^{\infty} [S_Y(t) - S_X(t)] dt = \frac{g[S_Y(t)]}{S_Y(t)} (E[Y] - E[X]) \geq 0.$$

□

4.4 Vertikalni razrez in aditivnost komonotonih tveganj

Po trditvi 3.7 za nenegativno slučajno spremenljivko X velja $E[X] = \int_0^\infty S_X(t)dt$, torej je matematično upanje ploščina lika pod preživetveno funkcijo. Ta ploščina pa je enaka kot pri inverzni funkciji preživetvene funkcije, torej lahko zapišemo tudi

$$E[X] = \int_0^1 S_X^{-1}(q)dq.$$

Inverz sam po sebi ni enolično določen, saj je lahko preživetvena funkcija na določenem delu konstantna. To se lahko zgodi samo v števno mnogo točkah in ne vpliva na integracijo, zato se lahko dogovorimo, da vzamemo za definicijo

$$S_X^{-1}(q) = \sup\{t|S_X(t) \geq q\},\ 0 \leq q \leq 1.$$

To za inverzno porazdelitveno funkcijo pomeni

$$F_X^{-1}(q) = \inf\{t|F_X(t) > q\},\ 0 \leq q \leq 1.$$

Zanjo velja naslednja ekvivalenca

$$F_X^{-1}(q) \leq t \quad \Leftrightarrow \quad q \leq F_X(t). \tag{4.4}$$

Potrebovali bomo tudi naslednjo povezavo med inverzno porazdelitveno in inverzno preživetveno funkcijo slučajne spremenljivke X:

$$\begin{aligned} F_X^{-1}(q) &= \inf\{t|F_X(t) > q\} = \inf\{t|S_X(t) < 1-q\} \\ &= \sup\{t|S_X(t) \geq 1-q\} = S_X^{-1}(1-q). \end{aligned} \tag{4.5}$$

Trditev 4.4. *Za konkavno naraščajočo funkcijo g z $g(0) = 0$ in $g(1) = 1$ velja*

$$\pi(X) = \int_0^\infty g[S_X(t)]dt = \int_0^1 S_X^{-1}(q)dg(q).$$

.

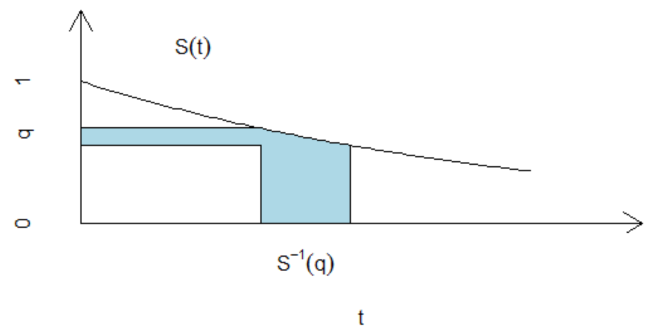
Dokaz. Dokaz bomo naredili samo za primer, ko sta $S_X(t)$ in $S_X^{-1}(t)$ odvedljivi funkciji. Z integracijo per partes dobimo

$$\int_0^1 S_X^{-1}(q)dg(q) = S_X^{-1}(q)g(q)\Big|_0^1 - \int_0^1 \frac{g(q)}{S'_X\left(S_X^{-1}(q)\right)}dq = -\int_0^1 \frac{g(q)}{S'_X\left(S_X^{-1}(q)\right)}dq,$$

kjer smo upoštevali $g(0) = 0$ in $S_X^{-1}(1) = 0$. S substitucijo $q = S_X(t),\ t = S_X^{-1}(q)$ končno dobimo

$$\int_0^1 S_X^{-1}(q)dg(q) = \int_0^\infty \frac{g[S_X(t)]S'_X(t)}{S'_X\left(S_X^{-1}(S_X(t))\right)}dt = \int_0^\infty g[S_X(t)]dt$$

$\square$



Slika 4.2: Razrez v vertikalni in v horizontalni smeri

S pomočjo razreza v vertikalni smeri bomo pokazali aditivnost za komonotona tveganja. Še pred tem pa si poglejmo izrek, ki nam bo pri tem v pomoč.

Izrek 4.5. *Naj bo X nenegativna slučajna spremenljivka in $g : \mathbb{R}_+ \to \mathbb{R}_+$ naraščajoča funkcija, ki je zvezna z leve. Potem za vse $q \in [0,1]$ velja*

$$F^{-1}_{g(X)}(q) = g[F^{-1}_X(q)].$$

Dokaz. Za vsak realen t velja

$$F^{-1}_{g(X)}(q) \leq t \Leftrightarrow q \leq F_{g(X)}(t).$$

Ker je g naraščajoča in zvezna z leve, velja

$$g(v) \leq t \Leftrightarrow v \leq \sup\{u|g(u) \leq t\}$$

za vse realne t in v. To pomeni

$$P(g(X) \leq t) = P(X \leq \sup\{u|g(u) \leq t\})$$

in zato

$$q \leq F_{g(X)}(t) \Leftrightarrow q \leq F_X(\sup\{u|g(u) \leq t\}).$$

Za končne vrednosti $\sup\{u|g(u) \leq t\}$ potem velja po ekvivalenci (4.4)

$$q \leq F_X(\sup\{u|g(u) \leq t\}) \Leftrightarrow F^{-1}_X(q) \leq \sup\{u|g(u) \leq t\}. \tag{4.6}$$

V primeru, ko je $\sup\{u|g(u) \leq t\}$ enak $+\infty$, ekvivalence (4.4) ne moremo uporabiti, vendar lahko preverimo, da ekvivalenca (4.6) vseeno velja. To drži, saj se v primeru, da je supremum $+\infty$, ekvivalenca glasi $q \leq 1 \Leftrightarrow F^{-1}_X(q) \leq +\infty$. Ker je g naraščajoča in zvezna z leve, dobimo

$$F^{-1}_X(q) \leq \sup\{u|g(u) \leq t\} \Leftrightarrow g[F^{-1}_X(q)] \leq t.$$

Če sedaj pogledamo vse ekvivalence, dobimo ravno

$$F_{g(X)}^{-1}(q) \leq t \Leftrightarrow g[F_X^{-1}(q)] \leq t.$$

To pomeni, da drži $F_{g(X)}^{-1}(q) = g[F_X^{-1}(q)]$. □

Izrek 4.6. *Za komonotoni tveganji X in Y sta preživetveni funkciji aditivni v horizontalni smeri:*

$$S_X^{-1}(q) + S_Y^{-1}(q) = S_{X+Y}^{-1}(q).$$

To pomeni, da je premijski princip, definiran v (4.1)*, aditiven za komonotona tveganja.*

Dokaz. Za komonotoni tveganji X in Y po trditvi 3.11 obstajajo slučajna spremenljivka Z in naraščajoči funkciji f in g, da je $X = f(Z)$ in $Y = g(Z)$. Privzamemo lahko, da je Z porazdeljena enakomerno zvezno na $(0,1)$, saj lahko zapišemo $X = f(F_Z^{-1}(U))$ in $Y = g(F_Z^{-1}(U))$, kjer je U porazdeljena enakomerno zvezno na $(0,1)$. Ker je Z porazdeljena enakomerno zvezno, je $X = f(Z) \sim F_X^{-1}(Z)$. Ker pa vemo, da X lahko zapišemo kot funkcijo Z, velja kar $X = F_X^{-1}(Z)$. Podobno dobimo tudi $Y = g(Z) = F_Y^{-1}(Z)$. To pomeni, da je tudi vsota $X+Y$ neka funkcija Z, označimo jo s h, natančneje

$$h(q) = F_X^{-1}(q) + F_Y^{-1}(q).$$

Funkcija h je seveda naraščajoča in zvezna z leve, kar po izreku 4.5 pomeni

$$F_{X+Y}^{-1}(q) = F_{h(Z)}^{-1}(q) = h(F_Z^{-1}(q)) = h(q).$$

Inverzna porazdelitvena funkcija je torej enaka

$$F_{X+Y}^{-1}(q) = F_X^{-1}(q) + F_Y^{-1}(q).$$

Enačba (4.5) nam sedaj da ravno

$$S_{X+Y}^{-1}(q) = F_{X+Y}^{-1}(1-q) = F_X^{-1}(1-q) + F_Y^{-1}(1-q) = S_X^{-1}(q) + S_Y^{-1}(q).$$

Če uporabimo trditev 4.4, dobimo aditivnost premijskega principa za komonotona tveganja:

$$\pi(X+Y) = \int_0^1 S_{X+Y}^{-1}(q)dg(q) = \int_0^1 [S_X^{-1}(q) + S_Y^{-1}(q)]dg(q) = \pi(X) + \pi(Y).$$

□

V drugem poglavju smo dejali, da si navadno želimo, da je premijski princip aditiven za neodvisna tveganja, tu pa smo pokazali, da je naš princip aditiven za komonotona tveganja. Obe možnosti lahko utemeljimo, od modela in posameznikove presoje pa je odvisno, katera možnost mu je bližje. Pri aditivnosti za neodvisna tveganja predpostavimo, da ima vsako izmed neodvisnih tveganj svojo ceno, ne glede na to, ali se zavarujemo za vsakega izmed njih posebej ali za vse skupaj. Na ta način lahko neodvisna tveganja vedno obravnavamo ločeno in ni potrebno, da gledamo tudi možnost združevanja v pakete. Pri aditivnosti za komonotona tveganja pa lahko utemeljimo popust na pakete za neodvisna tveganja, poleg tega pa posamezniku preprečujemo, da bi si znižal premijo za tveganje z drobljenjem tega na več manjših komonotonih tveganj. Pri aditivnosti za neodvisna tveganja namreč dobimo superaditivnost za komonotona, kar bomo videli v naslednjem razdelku.

4.5 Subaditivnost

Preden pokažemo subaditivnost našega premijskega principa bomo spoznali še nekaj pojmov, ki nam bodo pri tem pomagali. Naslednji izrek se navadno pripisuje tako Frechetu ([4]) kot tudi Hoeffdingu ([6]).

Izrek 4.7. *Skupna porazdelitvena funkcija $F_{X,Y}(x,y)$ slučajnega vektorja (X,Y) je omejena od spodaj in od zgoraj s Frechetovimi mejami:*

$$\max(F_X(x)+F_Y(y)-1,0) \leq F_{X,Y}(x,y) \leq \min(F_X(x),F_Y(y)).$$

Označimo sedaj z $R(F_X,F_Y)$ množico vseh tistih slučajnih vektorjev (X,Y), ki imajo marginalni porazdelitvi F_X in F_Y. Frechetove meje lahko tudi dosežemo in sicer zgornjo z vsemi vektorji iz $R(F_X,F_Y)$, ki imajo obliko $(F_X^{-1}(U),F_Y^{-1}(U))$, kjer je U zvezno enakomerno porazdeljena slučajna spremenljivka na intervalu $(0,1)$. Če se spomnimo, da so inverzi porazdelitvenih funkcij naraščajoče funkcije, vidimo, da gre za komonotona tveganja, ki smo jih že spoznali. Na podoben način dosežemo tudi spodnjo mejo in sicer z vektorjem $(F_X^{-1}(U),F_Y^{-1}(1-U))$. Sedaj bomo vpeljali novo delno urejenost, tokrat na množici slučajnih vektorjev v dveh dimenzijah.

Definicija 4.8. Naj bosta slučajna vektorja (X_1,Y_1) in (X_2,Y_2) dva elementa množice $R(F_X,F_Y)$. Za (X_1,Y_1) pravimo, da je *manj koreliran* od (X_2,Y_2), kar označimo $(X_1,Y_1) \preceq_{corr} (X_2,Y_2)$, če velja en izmed naslednjih dveh ekvivalentnih pogojev:

1. Za vse naraščajoče funkcije f in g, za katere obstajata naslednji kovarianci, velja
$$\mathrm{Cov}(f(X_1),g(Y_1)) \leq \mathrm{Cov}(f(X_2),g(Y_2)).$$

2. Za poljubni nenegativni števili x in y velja neenakost
$$F_{X_1,Y_1}(x,y) \leq F_{X_2,Y_2}(x,y).$$

Drugi pogoj nam pove, da je pri manj koreliranih vektorjih manjša verjetnost, da bosta obe komponenti hkrati majhni oziroma veliki. Naslednji izrek Dhaeneja in Goovaertsa ([3]) nam pokaže povezavo med korelacijsko urejenostjo slučajnih vektorjev (X_1,Y_1) in (X_2,Y_2) in stohastično urejenostjo drugega reda njunih vsot X_1+Y_1 in X_2+Y_2.

Izrek 4.9. *Naj bosta* (X_1, Y_1) *in* (X_2, Y_2) *elementa* $R(F_X, F_Y)$. *Če velja*

$$(X_1, Y_1) \preceq_{corr} (X_2, Y_2),$$

potem velja tudi

$$X_1 + Y_1 \preceq_{2nd} X_2 + Y_2.$$

Če sedaj povežemo izreka 4.7 in 4.9, dobimo naslednji rezultat.

Izrek 4.10. *Naj bo* U *enakomerno zvezno porazdeljena na* $(0, 1)$. *Potem za vsak slučajni vektor* (X, Y) *veljata naslednji zvezi:*

1. $$(F_X^{-1}(U), F_Y^{-1}(1-U)) \preceq_{corr} (X, Y) \preceq_{corr} (F_X^{-1}(U), F_Y^{-1}(U)),$$

2. $$F_X^{-1}(U) + F_Y^{-1}(1-U) \preceq_{2nd} X + Y \preceq_{2nd} F_X^{-1}(U) + F_Y^{-1}(U).$$

Sedaj bomo to, kar smo obravnavali v prejšnjih izrekih, prenesli tudi na področje premijskih principov.

Izrek 4.11. *Naj bo* π *premijski princip, ki ohranja stohastično urejenost drugega reda. Naj bosta slučajna vektorja* (X_1, Y_1) *in* (X_2, Y_2) *elementa* $R(F_X, F_Y)$, *za katera velja*

$$(X_1, Y_1) \preceq_{corr} (X_2, Y_2).$$

Potem je

$$\pi(X_1 + Y_1) \leq \pi(X_2 + Y_2).$$

Ker vemo, da naš premijski princip ohranja stohastično urejenost, se ta izrek nanaša tudi nanj, kar bomo s pridom uporabili v nadaljevanju. Iz izrekov 4.10 in 4.11 pa sledi naslednja pomembna posledica.

Posledica 4.12. *Naj bo* π *premijski princip, ki ohranja stohastično urejenost drugega reda. Pri predpostavkah izreka 4.10 velja*

$$\pi(F_X^{-1}(U) + F_Y^{-1}(1-U)) \leq \pi(X + Y) \leq \pi(F_X^{-1}(U) + F_Y^{-1}(U)).$$

Posledica 4.12 nam pove, da je tehnična premija pri premijskem principu, ki ohranja stohastično urejenost drugega reda največja, ko gre za komonotoni tveganji. To je smiselno, saj se v tem primeru obe tveganji gibata v isto smer, zato je verjetnost zelo velike škode največja, saj ne moremo pričakovati, da se bo velika škoda pri enem tveganju izničila z majhno pri drugem. Po drugi strani pa je premija najmanjša, ko velja $(X, Y) \stackrel{\mathrm{d}}{=} (F_X^{-1}(U), F_Y^{-1}(1-U))$. Tukaj pa se visoka škoda pri enem tveganju vedno deloma izniči z nizko v drugem, zato je negotovost najmanjša, kar je razlog za najmanjšo premijo. Naslednja posledica, ki bo za nas tudi ključna, je pravzaprav samo poseben primer posledice 4.12.

Posledica 4.13. *Premijski princip, ki ohranja stohastično urejenost drugega reda in je aditiven za komonotoni tveganji, je subaditiven:*

$$\pi(X+Y) \leq \pi(X) + \pi(Y) \text{ za vsa tveganja } X \text{ in } Y.$$

Izrek 4.14. *Za poljubni slučajni spremenljivki X in Y je premijski princip π, definiran v (4.1), subaditiven.*

Dokaz. V izrekih 4.3 in 4.6 smo že pokazali, da naš premijski princip ohranja stohastično urejenost drugega reda in je aditiven za komonotona tveganja. Izrek potem sledi neposredno iz posledice 4.13. □

4.6 Dodatek za negotovost parametra

Pri modeliranju škod pogosto preučujemo primere, ko so parametri porazdelitve škod tudi sami slučajne spremenljivke. Ker to poveča negotovost, bi si v tem primeru želeli višjo premijo. Pokazali bomo, da naš premijski princip ima to lastnost. Naj bo Θ slučajna spremenljivka, ki je hkrati parameter porazdelitve slučajne spremenljivke X. Označimo $S_X(t|\Theta) = P(X > t|\Theta)$. Uporabimo Jensenovo neenakost za konkavno funkcijo g:

$$E_\Theta[g[S_X(t|\Theta)]] \leq g[E_\Theta[S_X(t|\Theta)]] = g[S_X(t)],$$

saj velja $E_\Theta[S_X(t|\Theta)] = S_X(t)$. Za naš princip to pomeni

$$\pi(X) = \int_0^\infty g[S_X(t)]dt \geq \int_0^\infty E_\Theta[g[S_X(t|\Theta)]]dt = E_\Theta[\pi(X|\Theta)]. \tag{4.7}$$

Poglejmo si na tem mestu primer negotovosti parametra za PH transformacijo, ki jo bomo sicer podrobneje spoznali šele kasneje.

Primer 4.15. PH premijski princip dobimo s transformacijo $g(x) = x^{\frac{1}{\rho}}$, kjer je $\rho > 1$. Imamo posameznika, ki se bo odpravil na plezanje. Ne ve se, ali je dober plezalec ali slab, zavarovalnica pa ocenjuje, da je verjetnost za eno in drugo možnost $\frac{1}{2}$. Če je dober plezalec, se bo poškodoval z verjetnostjo $\theta_1 = 0.01$, če slab pa z verjetnostjo $\theta_2 = 0.1$. Izračunajmo premijo za zavarovanje, kjer posameznik ob poškodbi dobi 10000. Indeks zavarovalnice je $\rho = 1.5$. Ker pri verjetnosti poškodbe Θ velja

$$S_X(t|\Theta) = \begin{cases} \Theta, & t < 10000; \\ 0, & t \geq 10000, \end{cases}$$

je

$$S_X(t) = \frac{1}{2}S_X(t|\Theta = 0.01) + \frac{1}{2}S_X(t|\Theta = 0.1) = \begin{cases} 0.055, & t < 10000; \\ 0, & t \geq 10000; \end{cases}$$

in zato

$$\pi_\rho(X) = \int_0^\infty (S_X(t))^{\frac{1}{\rho}} dt = 10000 \cdot 0.055^{1.5} = 1446.$$

Izračunajmo levo in desno stran v neenakosti (4.7). Ker je

$$\pi_\rho(X|\Theta = 0.01) = 10000 \cdot 0.01^{1.5} = 464,$$

$$\pi_\rho(X|\Theta = 0.1) = 10000 \cdot 0.1^{1.5} = 2154,$$

velja

$$E_\Theta[\pi_\rho(X|\Theta)] = \frac{1}{2} \cdot 464 + \frac{1}{2} \cdot 2154 = 1309 \leq 1446 = \pi_\rho(X).$$

4.7 Primeri transformacijskih funkcij

V tem razdelku si bomo pogledali nekaj primerov enoparametričnih transformacij preživetvene funkcije in pripadajoče premijske principe.

1. *PH transformacija:*

   $$g(x) = x^{\frac{1}{\rho}}, \ \rho \geq 1$$

   V tem primeru je $g'(0) = \infty$ za vsak $\rho > 1$.

2. *Dualna potenčna transformacija:* V tem primeru potenciramo porazdelitveno funkcijo. Ker želimo tveganje povečati, mora biti eksponent α večji od 1, torej

   $$F_Y(t) = [F_X(t)]^\alpha,$$

   oziroma

   $$S_Y(t) = g[S_X(t)],$$

   kjer je

   $$g(x) = 1 - (1 - x)^\alpha.$$

   Da g ustreza zahtevam, je razvidno že iz transformacije porazdelitvene funkcije, a lahko vseeno preverimo. Očitno je $g(0) = 0$ in $g(1) = 1$. Poleg tega je funkcija g naraščajoča, saj velja

   $$g'(x) = \alpha(1 - x)^{\alpha - 1} \geq 0,$$

   in konkavna, saj velja

   $$g''(x) = -\alpha(\alpha - 1)(1 - x)^{\alpha - 2} \leq 0.$$

   Ker je $g'(0) = \alpha$, je relativni dodatek na zgornjih slojih omejen s to vrednostjo.

3. *Dennebergov princip absolutnega odklona:* Pri Dennebergovem premijskem principu izračunamo premijo kot

   $$\pi_\theta(X) = E[X] + \theta\tau(X),$$

kjer $\tau(X)$ predstavlja povprečni absolutni odklon od mediane, število $\theta \in [0,1]$ pa je vnaprej izbrano. Definirajmo funkcijo

$$g(x) = \begin{cases} (1+\theta)x, & 0 \leq x \leq \frac{1}{2}, \\ \theta + (1-\theta)x, & \frac{1}{2} \leq x \leq 1 \end{cases}$$

Pokažimo sedaj, da tako definirana funkcija res ustreza Dennebergovemu principu za zvezne slučajne spremenljivke. Naj m predstavlja mediano. Predpis $g[S_X(t)]$ se spremeni pri $S_X(t) = \frac{1}{2}$, torej ravno v mediani. Poudarimo še, da zaradi padanja $S_X(t)$ dobimo prvi predpis pri večjih in drugega pri manjših vrednostih t. Dobimo

$$\begin{aligned}
\pi_\theta(X) &= \int_0^\infty g[S_X(t)]dt = \int_0^m (\theta + (1-\theta)S_X(t))\,dt + \int_m^\infty (1+\theta)S_X(t)dt \\
&= \int_0^\infty S_X(t)dt + \theta\left(\int_0^m (1 - S_X(t))\,dt + \int_m^\infty S_X(t)dt\right) \\
&= E[X] + \theta\left(\int_0^m \int_0^t dF_X(x)dt + \int_m^\infty \int_t^\infty dF_X(x)dt\right) \\
&= E[X] + \theta\left(\int_0^m \int_x^m dtdF_X(x) + \int_m^\infty \int_m^x dtdF_X(x)\right) \\
&= E[X] + \theta\left(\int_0^m (m-x)dF_X(x) + \int_m^\infty (x-m)dF_X(x)\right) \\
&= E[X] + \theta\int_0^\infty |m-x|dF_X(x) = E[X] + \theta\tau(X)
\end{aligned}$$

Če obravnavamo posamezno tveganje, navadno obstaja več kot polovična verjetnost, da do škode sploh ne bo prišlo. V tem primeru je mediana enaka 0, zato je $\tau(X)$ enak matematičnemu upanju, kar pomeni, da se Dennenbergovo načelo poenostavi v princip matematičnega upanja, tj. $\pi_\theta(X) = (1+\theta)E[X]$. Ker je $g'(0) = 1+\theta$, je relativni dodatek na višjih slojih manjši od te vrednosti, torej je vedno manjši od 200%.

4. *Kvadratna funkcija:* Transformacijska funkcija ima obliko

$$g(x) = (1+r)x - rx^2,\ 0 \leq r \leq 1.$$

Ker je $g'(0) = 1 + r$, podobno kot v predhodnem primeru zaključimo, da je dodatek na zgornjih slojih manjši od $1 + r$, torej vedno manjši od 200%.

5. *Korenska funkcija:* Pri danem $r > 0$ vzemimo transformacijsko funkcijo

$$g(x) = \frac{\sqrt{1+rx} - 1}{\sqrt{1+r} - 1}.$$

Odvod v točki 0 je enak

$$g'(0) = \frac{r}{2(\sqrt{1+r} - 1)} < \infty,$$

torej je tudi tu dodatek za zgornje plasti omejen.

6. *Eksponentna funkcija:* Pri izbranem $\alpha > 0$ postavimo

$$g(x) = \frac{1 - e^{-\alpha x}}{1 - e^{-\alpha}}.$$

Preverimo lahko, da je

$$g'(0) = \frac{\alpha}{1 - e^{-\alpha}} < \infty.$$

7. *Logaritemska funkcija:* Pri izbranem $r > 0$ definiramo

$$g(x) = \frac{\log(1 + rx)}{\log(1 + r)}.$$

Odvod v točki 0 je

$$g'(0) = \frac{r}{\log(1 + r)} < \infty.$$

8. *Mešanje in komponiranje:* Naj bodo sedaj g_i $(i = 1, 2, ..., n)$ naraščajoče konkavne funkcije z $g_i(0) = 0$ in $g_i(1) = 1$.

   (i) Za $p_i \geq 0$ in $\sum_{i=1}^n p_i = 1$ je funkcija $g = \sum_{i=1}^n p_i g_i$ prav tako konkavna naraščajoča funkcija z $g(0) = 0$ in $g(1) = 1$.

   (ii) Funkcija $g(u) = g_2[g_1(u)]$ je tudi naraščajoča konkavna funkcija z $g(0) = 0$ in $g(1) = 1$.

Z mešanjem dveh osnovnih tipov transformacij lahko dobimo družine dvoparametričnih transformacij. Opazimo tudi, da ima samo PH transformacija $g'(0) = \infty$. Ta lastnost se bo v nadaljevanju izkazala za zelo pomembno.

4.8 Primerjava principov na primeru

Kot smo videli, so vse transformacije, ki smo jih predstavili, monotone tako glede na stohastično urejenost prvega kot tudi drugega reda. Na teh primerih torej bistvenih razlik med transformacijami ne bo. Zato pa si lahko pogledamo razlike na primeru slučajnih spremenljivk z enakim upanjem, a različno varianco.

Primer 4.16. Naj ima tveganje X porazdelitev na dveh točkah:

$$X \sim \begin{pmatrix} 0 & 4 \\ \frac{3}{4} & \frac{1}{4} \end{pmatrix}.$$

Potem je $E[X] = \frac{3}{4} \cdot 0 + \frac{1}{4} \cdot 4 = 1$, $\mathrm{Var}(X) = \frac{3}{4} \cdot 1 + \frac{1}{4} \cdot 9 = 3$ ter $S_X(t) = \frac{1}{4}$ za $t < 4$ in $S_X(t) = 0$ za $t \geq 4$. Y pa je porazdeljena po Paretu s parametroma $(2, 1)$, torej

$$S_Y(t) = \left(\frac{1}{1 + t}\right)^2.$$

Spomnimo se, da ima slučajna spremenljivka, porazdeljena po Paretu s parametroma (α, λ), matematično upanje enako $\frac{\lambda}{\alpha-1}$ za $\alpha > 1$, torej je $E[Y] = 1$. Poleg tega je za $\alpha \leq 2$ varianca neskončna, kar velja tudi za naš primer. Pokažimo, da nobena izmed obeh slučajnih spremenljivk ne dominira druge bodisi po stohastični urejenosti prvega bodisi drugega reda. Ker za $t < 1$ in $t > 4$ velja $S_X(t) < S_Y(t)$, medtem ko je $S_X(t) > S_Y(t)$ za $t \in (1, 4)$, nobena izmed pripadajočih preživetvenih funkcij ni povsod večja od druge, torej nimamo dominance v smislu prvega reda stohastične urejenosti. Poleg tega pa velja

$$\int_x^\infty S_Y(t)dt = \int_x^\infty \left(\frac{1}{1+t}\right)^2 dt = -\frac{1}{1+t}\Big|_x^\infty = \frac{1}{1+x}.$$

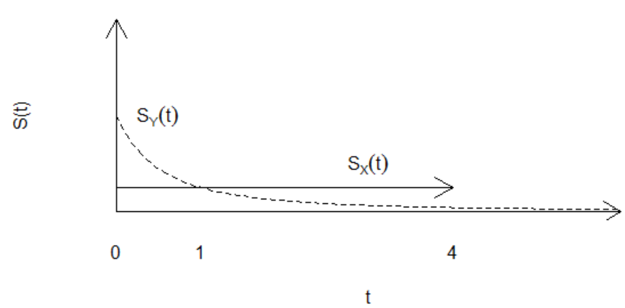
To pomeni, da je

$$\int_1^\infty S_X(t)dt = \frac{3}{4} > \frac{1}{2} = \int_1^\infty S_Y(t)dt,$$

po drugi strani pa je

$$\int_4^\infty S_X(t)dt = 0 < \frac{1}{5} = \int_4^\infty S_Y(t)dt,$$

kar pomeni, da nimamo niti dominance v smislu drugega reda stohastične urejenosti. Grafa funkcij sta prikazana na sliki 4.3. X in Y imata enako matematično



Slika 4.3: Grafa funkcij $S_X(t)$ in $S_Y(t)$

upanje, vendar ima X končno, Y pa neskončno varianco, poleg tega je X omejena, Y pa neomejena in ima celo težek rep. Zato bi se kljub temu, da glede na stohastično urejenost prvega in drugega reda nobena izmed slučajnih spremenljivk ni bolj nevarna od druge, večina strinjala, da je Y nevarnejši od X. Poleg tega je v [7, str. 50-53] pokazano, da bi imel tak pogled vsak posameznik z dvakrat odvedljivo naraščajočo konkavno funkcijo koristnosti, kar so precej običajne zahteve za funkcijo koristnosti. Izberimo sedaj za vse predstavljene enoparametrične transformacije

TRANSFORMACIJA	PARAMETER	$\pi(X)$	$\pi(Y)$
PH transformacija	$\rho = 1.151$	1.2	1.3570
Dualna potenčna	$r = 1.240$	1.2	1.1778
Dennenbergova	$\alpha = 0.2$	1.2	1.1657
Kvadratna	$r = 0.2667$	1.2	1.1778
Korenska	$r = 1.641$	1.2	1.1861
Eksponentna	$\alpha = 0.5136$	1.2	1.1795
Logaritemska	$r = 1.182$	1.2	1.1822

Tabela 4.1: Primerjava premij za dvotočkovno in Paretovo porazdelitev med različnimi transformacijami

take parametre, da bo imelo tveganje X tehnično premijo enako 1.2. V tabeli 4.1 so predstavljeni rezultati. PH transformacija je edina izmed obravnavanih, ki po Paretu porazdeljenemu tveganju Y priredi višjo tehnično premijo kot dvotočkovno porazdeljenemu tveganju X z enakim matematičnim upanjem. To je posledica dejstva, da je $g'(0) = \infty$ samo pri PH transformaciji, tako da le-ta edina lahko da dovolj velik dodatek za velike škode v desnem repu Paretove porazdelitve. Poglejmo si, kakšno obliko imata premiji pri PH transformaciji za splošen ρ. Označevali ju bomo s π_ρ, da poudarimo, da je poleg slučajne spremenljivke premija odvisna tudi od izbire ρ. Za vse $\rho > 1$ je

$$\pi_\rho(X) = \int_0^4 \left(\frac{1}{4}\right)^{\frac{1}{\rho}} dt = 4 \cdot 4^{-\frac{1}{\rho}} = 4^{1-\frac{1}{\rho}}.$$

Če je $\rho < 2$, potem

$$\pi_\rho(Y) = \int_0^\infty \left(\frac{1}{1+t}\right)^{\frac{2}{\rho}} dt = \int_0^\infty (1+t)^{\frac{2}{\rho}} dt = \frac{\rho}{\rho-2}(1+t)^{\frac{\rho-2}{\rho}}\Big|_0^\infty = \frac{\rho}{2-\rho},$$

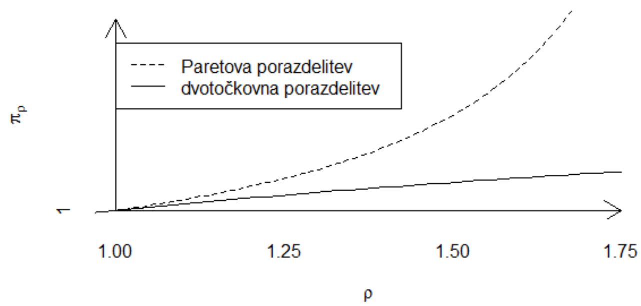
sicer je $\pi_\rho(Y) = \infty$. Torej velja

$$\pi_\rho(Y) = \begin{cases} \frac{\rho}{2-\rho}, & 1 < \rho < 2, \\ \infty, & \rho \geq 2. \end{cases}$$

Kot vidimo na sliki 4.4, je za vsak ρ premija Paretovo porazdeljene slučajne spremenljivke večja od premije dvotočkovno porazdeljene slučajne spremenljivke z istim matematičnim upanjem.

4.9 Reprezentacija premijskih principov, aditivnih za komonotona tveganja

Naslednji izrek nam bo povedal še en dodaten razlog, zakaj smo obravnavali ravno transformacije preživetvene funkcije. Dokaz izreka najdemo v [2, str. 144].



Slika 4.4: Premiji za Paretovo in dvotočkovno slučajno spremenljivko pri PH transformaciji

Izrek 4.17. *Naj bo μ verjetnostna mera in naj bo $\pi : L^\infty(\mu) \to [0, \infty)$ funkcija, ki je aditivna za komonotona tveganja, ohranja stohastično urejenost prvega reda in je $\pi(1) = 1$. Potem obstaja takšna transformacijska funkcija $g : \mathbb{R}_+ \to [0, 1]$, da velja*

$$\pi(X) = \int_0^\infty g[S_X(t)]dt$$

za vse $X \in L^\infty(\mu)$.

Pri omejenih slučajnih spremenljivkah to pomeni, da lahko vsak premijski princip z lastnostmi iz izreka 4.17 predstavimo kot transformacijo preživetvene funkcije, torej v to skupino spadajo vsi principi z željenimi lastnostmi.

Poglavje 5

PH transformacija in pripadajoči premijski princip

5.1 Definicija

V tem poglavju bomo podrobneje predstavili naslovno temo dela, to je PH transformacija ali transformacija proporcionalnega hazarda (*angl. proportional hazard transform*). Kot smo videli v primeru 4.16, je zaradi $g'(0) = \infty$ PH transformacija najbolj zanimiva za obravnavo med vsemi transformacijami preživetvene funkcije. Za začetek si bomo ogledali, od kod njeno poimenovanje sploh izhaja. Naj bo X neka absolutno zvezna slučajna spremenljivka s porazdelitveno funkcijo $F_X(t)$, tj. obstaja njena gostota porazdelitve $f_X(t) = F_X'(t)$. Funkcijo hazarda $\mu_X : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ definiramo kot

$$\mu_X(t) = \frac{F_X'(t)}{1 - F_X(t)} = \frac{f_X(t)}{1 - F_X(t)} = -\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t} \log S_X(t). \tag{5.1}$$

Ime funkcije hazarda izhaja iz teorije preživetja, kjer je sorazmerna z verjetnostjo, da bo opazovani posameznik umrl v času $(t, t + dt]$, če vemo, da je bil do trenutka t živ. V našem primeru bi funkcija hazarda predstavljala verjetnost, da je škoda velikosti med t in $t + dt$, če vemo, da je velika najmanj t. Sedaj uvedemo novo funkcijo, ki funkcijo hazarda proporcionalno zmanjša, torej poveča tveganje velikih škod:

$$\mu_Y(t) = \frac{1}{\rho}\mu_X(t), \ \rho > 1.$$

Iz oblike na desni strani enačbe (5.1) vidimo, da je to kar funkcija hazarda za preživetveno funkcijo

$$S_Y(t) = S_X(t)^{\frac{1}{\rho}}.$$

Da $S_Y(t)$ predstavlja preživetveno funkcijo neke slučajne spremenljivke Y, je lahko preveriti.

Definicija 5.1. Naj bo X slučajna spremenljivka s preživetveno funkcijo $S_X(t)$. Potem enačba

$$S_Y(t) = S_X(t)^{\frac{1}{\rho}}, \ \rho > 1,$$

definira novo slučajno spremenljivko[3] Y. Preslikavi Π_ρ, ki slučajni spremenljivki X priredi slučajno spremenljivko Y, pravimo *transformacija proporcionalnega hazarda* ali *PH transformacija.*

PH transformacijo bomo sedaj vzeli za osnovo premijskega principa π_ρ.

Definicija 5.2. Za škodo X s preživetveno funkcijo $S_X(t)$ je *PH premijski princip* enak

$$\pi_\rho(X) = E\left[\Pi_\rho(X)\right] = \int_0^\infty S_X(t)^{\frac{1}{\rho}} dt, \ \rho \geq 1,$$

ρ pa imenujemo *indeks* (nenaklonjenosti tveganju).

Ker smo izračunali premijo škode X kot matematično upanje njene PH transformiranke, to pomeni, da za $\rho = 1$ dobimo kar nevarnostno premijo.

5.2 Primeri PH transformirank

V določenih primerih se izkaže, da imajo PH transformiranke znane porazdelitve, zato lahko v teh primerih za tveganje prilagojeno premijo preprosto izračunamo.

Primer 5.3 (Eksponentna porazdelitev)**.** Naj bo X porazdeljena eksponentno s parametrom $\lambda > 0$, to pomeni $S_X(t) = e^{-\lambda t}$. Potem ima njena PH transformiranka Y preživetveno funkcijo

$$S_Y(t) = e^{-\frac{\lambda t}{\rho}},$$

kar pomeni, da je prav tako porazdeljena eksponentno, vendar s parametrom $\frac{\lambda}{\rho}$. Pripadajoči nevarnostna in za tveganje prilagojena premija sta

$$E[X] = \frac{1}{\lambda}, \ \pi_\rho(X) = \frac{\rho}{\lambda}.$$

Vidimo, da za tveganje prilagojena premija raste linearno z ρ.

Primer 5.4 (Paretova porazdelitev)**.** Naj bo X porazdeljena Paretovo s parametroma (α, λ):

$$S_X(t) = \left(\frac{\lambda}{\lambda + t}\right)^\alpha.$$

Potem ima njena PH transformiranka Y preživetveno funkcijo

$$S_Y(t) = \left(\frac{\lambda}{\lambda + t}\right)^{\frac{\alpha}{\rho}},$$

[3] V resnici transformacija priredi zgolj porazdelitveno funkcijo in ne slučajne spremenljivke, vendar zaradi lažjega izražanja v tem delu ne bomo razlikovali med tema dvema pojmoma.

kar pomeni, da ima prav tako Paretovo porazdelitev s parametroma $\left(\frac{\alpha}{\rho}, \lambda\right)$. Pri $\alpha > 1$ sta pripadajoči nevarnostna in za tveganje prilagojena premija

$$E[X] = \frac{\lambda}{\alpha - 1}, \ \pi_\rho(X) = \begin{cases} \frac{\lambda\rho}{\alpha-\rho}, & \rho < \alpha; \\ \infty, & \rho \geq \alpha. \end{cases}$$

Ko je $\alpha \leq 1$, je že matematično upanje Paretove porazdelitve same enako ∞, zato je taka tudi premija, ki je vedno večja od matematičnega upanja. Vemo že, da premija narašča z ρ, ne vemo pa ali vedno hitreje ali vedno počasneje. V ta namen dvakrat odvajamo po ρ:

$$\begin{aligned} \frac{\partial^2 \pi_\rho(X)}{\partial \rho^2} &= \frac{\partial}{\partial \rho}\left(\frac{\partial \pi_\rho(X)}{\partial \rho}\right) = \frac{\partial}{\partial \rho}\left(\frac{\lambda(\alpha-\rho)+\lambda\rho}{(\alpha-\rho)^2}\right) \\ &= \frac{\partial}{\partial \rho}\left(\frac{\lambda\alpha}{(\alpha-\rho)^2}\right) = \frac{3\lambda\alpha}{(\alpha-\rho)^3} > 0 \end{aligned}$$

Vidimo torej, da je pri Paretovi porazdelitvi $\pi_\rho(X)$ konveksna funkcija ρ.

Primer 5.5 (Weibullova porazdelitev)**.** Naj bo X porazdeljena Weibullovo s parametroma (λ, k), tj.

$$S_X(t) = e^{-\left(\frac{t}{\lambda}\right)^k}.$$

Potem ima njena PH transformiranka Y preživetveno funkcijo

$$S_Y(t) = e^{-\frac{1}{\rho}\left(\frac{t}{\lambda}\right)^k} = e^{-\left(\frac{t}{\lambda\rho^{1/k}}\right)^k},$$

kar pomeni, da je prav tako porazdeljena Weibullovo s parametroma $(\lambda\rho^{\frac{1}{k}}, k)$. Pripadajoči nevarnostna in za tveganje prilagojena premija sta

$$E[X] = \lambda\Gamma\left(1 + \frac{1}{k}\right), \ \pi_\rho(X) = \lambda\rho^{\frac{1}{k}}\Gamma\left(1 + \frac{1}{k}\right).$$

Poglejmo si še, kako se obnaša $\pi_\rho(X)$ kot funkcija ρ v tem primeru. Ker je

$$\begin{aligned} \frac{\partial^2 \pi_\rho(X)}{\partial \rho^2} &= \frac{\partial}{\partial \rho}\left(\frac{\partial \pi_\rho(X)}{\partial \rho}\right) = \frac{\partial}{\partial \rho}\frac{1}{k}\lambda\rho^{\frac{1}{k}-1}\Gamma(1+\frac{1}{k}) \\ &= \frac{1}{k}\left(\frac{1}{k} - 1\right)\lambda\rho^{\frac{1}{k}-2}\Gamma(1+\frac{1}{k}), \end{aligned}$$

je $\pi_\rho(X)$ konkavna za $k \in (0,1)$, konveksna za $k > 1$ in linearna za $k = 1$. Zadnje smo pravzaprav že vedeli, saj je za $k = 1$ Weibullova porazdelitev kar eksponentna s parametrom $\frac{1}{\lambda}$.

Primer 5.6 (Burrova porazdelitev)**.** Naj bo X porazdeljena Burrovo s parametroma (c, k):

$$S_X(t) = (1 + x^c)^{-k}.$$

Potem ima njena PH transformiranka Y preživetveno funkcijo

$$S_Y(t) = (1 + x^c)^{-\frac{k}{\rho}},$$

kar pomeni, da je prav tako porazdeljena Burrovo s parametroma $(c, \frac{k}{\rho})$. Pripadajoči nevarnostna in za tveganje prilagojena premija sta

$$E[X] = kB\left(k - \frac{1}{c}, 1 + \frac{1}{c}\right),\ \pi_\rho(X) = \frac{k}{\rho}B\left(\frac{k}{\rho} - \frac{1}{c}, 1 + \frac{1}{c}\right),$$

kjer je $B(\cdot, \cdot)$ beta funkcija. Obnašanja $\pi_\rho(X)$ zaradi kompleksnosti izraza tokrat ne bomo obravnavali.

Primer 5.7 (Enakomerna zvezna porazdelitev)**.** V tem primeru PH transformiranka ne sodi med enakomerne zvezne porazdelitve, vendar lahko njeno za tveganje prilagojeno premijo zaradi preprostosti preživetvene funkcije izračunamo kar po definiciji. Naj ob tem dodamo še, da bomo obravnavali samo tiste enakomerne zvezne porazdelitve, ki imajo prvi parameter 0, torej s parametroma $(0, b)$:

$$S_X(t) = 1 - \frac{t}{b},\ t \leq b.$$

Njena PH transformiranka Y ima preživetveno funkcijo

$$S_Y(t) = \left(1 - \frac{t}{b}\right)^{\frac{1}{\rho}},\ t \leq b,$$

pripadajočo za tveganje prilagojeno premijo pa izračunamo kot

$$\pi_\rho(X) = \int_0^\infty S_X(t)^{\frac{1}{\rho}} dt = \int_0^b \left(1 - \frac{t}{b}\right)^{\frac{1}{\rho}} = -\frac{b\rho}{\rho + 1}\left(1 - \frac{t}{b}\right)^{\frac{1}{\rho}+1}\Bigg|_0^b = \frac{b\rho}{1 + \rho},$$

medtem ko je nevarnostna premija $E[X] = \frac{b}{2}$.

Spomnimo se še diskretnih porazdelitev. Tu ne bomo gledali posameznih tipov, pač pa bomo le omenili, da je nosilec porazdelitev PH transformiranke enak kot v začetni funkciji, razlika je le v pripadajoči verjetnostni funkciji. To sledi iz dejstva, da ima porazdelitvena funkcija transformiranke skoke v istih točkah kot začetna porazdelitvena funkcija.

Trditev 5.8. *Tehnična premija po PH premijskem principu je strogo naraščajoča funkcija parametra ρ:*

$$\rho_1 < \rho_2 \Rightarrow \pi_{\rho_1} < \pi_{\rho_2}.$$

Dokaz. Ker $\rho_1 < \rho_2$, je

$$S_X(t)^{\frac{1}{\rho_1}} < S_X(t)^{\frac{1}{\rho_2}}$$

za vse $t \in [0, \infty)$, kjer je $S_X(t) \in (0, 1)$. Zato je

$$\pi_{\rho_1}(X) < \pi_{\rho_2}(X).$$

□

S pomočjo različnih ρ lahko opišemo transformacije za posameznike ali zavarovalnice, ki imajo različno izrazito nenaklonjenost tveganju. Navadno predvidevamo, da so posamezniki najbolj nenaklonjeni tveganju, pozavarovalnice najmanj, nekje vmes po naklonjenosti tveganju pa so zavarovalnice. Poglejmo si, kaj to pomeni za različne porazdelitve.

Primer 5.9. Obravnavamo 3 različna tveganja ter posameznika, zavarovalnico in pozavarovalnico z indeksi $\rho_1 = 1.8$, $\rho_2 = 1.5$ in $\rho_3 = 1.2$. Naša tveganja naj bodo porazdeljena:

- enakomerno: $S_X(t) = 1 - \frac{1}{2b}t,\ 0 \le t \le 2b$,
- eksponentno: $S_Y(t) = e^{-\frac{t}{b}}$,
- Paretovo: $S_Z(t) = \left(\frac{b}{b+t}\right)^2$,

parametre pa smo izbrali tako, da imajo vsa enako matematično upanje b. Iz prejšnjih primerov vidimo, da so njihove tehnične premije enake

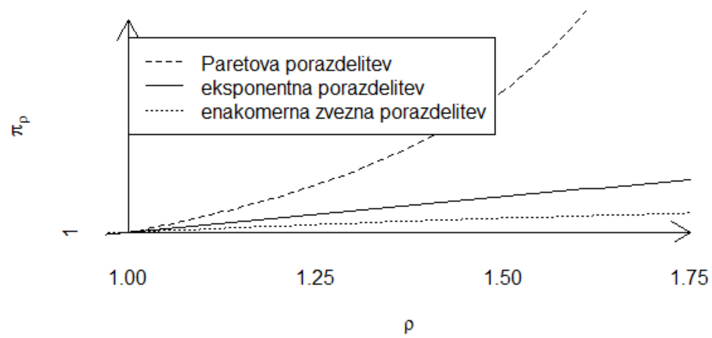
$$\begin{aligned} \pi_\rho(X) &= \frac{2\rho}{\rho+1}b,\ \pi_\rho(Y) = \rho b \\ \pi_\rho(Z) &= \begin{cases} \frac{\rho}{2-\rho}b, & \rho < 2; \\ \infty, & \rho \ge 2. \end{cases} \end{aligned}$$

Tabela 5.1 nam prikazuje rezultate za vse tri porazdelitve ter različne ρ.

	$\pi_\rho(X)$	$\pi_\rho(Y)$	$\pi_\rho(Z)$
$\rho_1 = 1.8$	$1.29b$	$1.8b$	$9.0b$
$\rho_2 = 1.5$	$1.2b$	$1.5b$	$3.0b$
$\rho_1 = 1.2$	$1.09b$	$1.2b$	$1.5b$

Tabela 5.1: Primerjava premij za različne porazdelitve in indekse ρ

Pri vseh je najnižja premija enakomerno porazdeljenega tveganja X, sledi eksponentno Y, najvišja pa je premija za Paretovo Z. To smo lahko pričakovali, saj je enakomerna porazdelitev omejena, eksponentna je neomejena, a ima lahek rep, Paretova pa je neomejena in ima težek rep. Obnašanje π_ρ za različne porazdelitve pri



Slika 5.1: Premije za enakomerno zvezno, eksponentno in Paretovo porazdelitev pri b=1

$b = 1$ je prikazano na sliki 5.1. Vnaprej smo vedeli tudi, da bo premija naraščala z ρ. Zanimivo pa je, da imata zavarovalnica in posameznik pri enakomerni porazdelitvi približno 10 in 20 odstotkov višji premiji, pri Paretovi pa kar 100 in 500 odstotkov višji. To pomeni, da je vpliv odnosa do tveganja večji pri bolj nevarnih tveganjih.

5.3 Porazdelitev premije med sloji

Pred glavnim izrekom tega podrazdelka bomo navedli krajšo lemo, ki jo bomo potrebovali pri dokazovanju.

Lema 5.10. *Naj bodo a, b, c in d pozitivna realna števila. Potem iz* $\frac{c}{d} \geq \frac{a}{b}$ *sledi* $\frac{a+c}{b+d} \geq \frac{a}{b}$.

Dokaz. Naj bo $\frac{c}{d} \geq \frac{a}{b}$. To pomeni $bc - ad \geq 0$ oziroma $\frac{bc-ad}{b(b+d)} \geq 0$. Če sedaj v števcu odštejemo in prištejemo ab, dobimo ravno

$$\frac{ab + cb - ab - ad}{b(b+d)} = \frac{(a+c)b - a(b+d)}{b(b+d)} = \frac{a+c}{b+d} - \frac{a}{b} \geq 0,$$

kar smo hoteli pokazati. □

Izrek 5.11. *Naj bo dt infinitezimalna sprememba t. Za tveganje X in* $\rho_1 > \rho_2 \geq 1$ *sta razmerji*

$$\phi(t; \rho_1, \rho_2) = \frac{\pi_{\rho_1}(I_{(t,t+dt]})}{\pi_{\rho_2}(I_{(t,t+dt]})},$$

$$\Phi(t; \rho_1, \rho_2) = \frac{\pi_{\rho_1}(I_{(0,t]})}{\pi_{\rho_2}(I_{(0,t]})}$$

naraščajoči funkciji t.

Dokaz. Ker je

$$\phi(t;\rho_1,\rho_2) = \frac{\pi_{\rho_1}(I_{(t,t+dt]})}{\pi_{\rho_2}(I_{(t,t+dt]})} = \frac{S_X(t)^{\frac{1}{\rho_1}}dt}{S_X(t)^{\frac{1}{\rho_2}}dt} = S_X(t)^{\frac{1}{\rho_1}-\frac{1}{\rho_2}},$$

je ϕ očitno naraščajoča funkcija t. Iz tega sledi tudi $\Phi(t;\rho_1\rho_2) \leq \phi(t;\rho_1,\rho_2)$. Iz zapisa

$$\Phi(t+dt;\rho_1,\rho_2) = \frac{\pi_{\rho_1}(I_{(0,t]}) + \pi_{\rho_1}(I_{(t,t+dt]})}{\pi_{\rho_2}(I_{(0,t]}) + \pi_{\rho_2}(I_{(t,t+dt]})}$$

in leme 5.10 vidimo, da je tudi $\Phi(t;\rho_1,\rho_2)$ naraščajoča funkcija t. □

Oznako ϕ smo že uporabili, in sicer za relativni dodatek. S tem pa ni nič narobe, saj opazimo, da je naše razmerje pri izboru $\rho_2 = 1$ kar enako relativnemu dodatku za PH transformacijo: $\phi(t;\rho_1,1) = \phi(t)$. Kot smo videli v primeru 5.9 je premija odvisna od ρ, ki je lahko različen za zavarovalnico in zavarovanca. To je eden izmed razlogov, da vpeljemo pojem konsistentnosti, ki predvideva, da je za zavarovalnico ključnega pomena relativni donos.

Definicija 5.12. Denimo, da lahko zavarovalnica za dve tveganji X in Y iztrži premiji, ki sta enaki $P(X)$ in $P(Y)$. Zavarovalnica z indeksom ρ je *konsistentna*, če veljata naslednji dve zahtevi:

1. Če velja enakost
$$\frac{P(X)}{P(Y)} = \frac{\pi_\rho(X)}{\pi_\rho(Y)},$$
je zavarovalnica indiferentna, katero od tveganj X in Y zavaruje.

2. Če velja neenakost
$$\frac{P(X)}{P(Y)} > \frac{\pi_\rho(X)}{\pi_\rho(Y)},$$
zavarovalnica raje zavaruje tveganje X kot Y.

S pomočjo konsistentnosti lahko sedaj priredimo ceno posameznemu infinitezimalnemu sloju. Če zavarovalnica z indeksom ρ sprejme v zavarovanje tveganje X za premijo $P(X)$, potem je poštena premija infinitezimalnega sloja $I_{(t,t+dt]}$ enaka

$$\frac{P(X)}{\pi_\rho(X)}\pi_\rho(I_{(t,t+dt]}).$$

To je natanko premija, pri kateri je zavarovalnica indiferentna med poljubnima dvema slojema tveganja X.

Primer 5.13. Imamo tveganje X, ki bo utrpelo škodo z 5% verjetnostjo. Če se škoda pojavi, je porazdeljena po Paretu s parametroma $(\lambda = 3000, \alpha = 1.5)$. Preživetvena funkcija takega tveganja ima obliko:

$$S_X(t) = P(X > t) = P(X > 0)P(X > t | X > 0) = 0.05 \left(\frac{3000}{3000 + t}\right)^{1.5}.$$

Izračunajmo matematično upanje in tehnično premijo slojev z različnimi prioritetami in limitom 1000 pri dveh različnih indeksih $\rho_1 = 1.1$ in $\rho_2 = 1.2$ ter pripadajoči relativni dodatek. Naj Y predstavlja PH transformiranko.

$$S_Y(t) = 0.05^{\frac{1}{\rho}} \left(\frac{3000}{3000 + t}\right)^{\frac{1.5}{\rho}}$$

$$E[I_{(a,a+1000]}] = \int_a^{a+1000} 0.05 \left(\frac{3000}{3000 + t}\right)^{1.5} dt = \frac{3000}{1 - 1.5} \left(\frac{3000 + t}{3000}\right)^{1-1.5} \Big|_{t=a}^{a+1000}$$

$$\pi_\rho(I_{(a,a+1000]}) = \int_a^{a+1000} 0.05^{\frac{1}{\rho}} \left(\frac{3000}{3000 + t}\right)^{\frac{1.5}{\rho}} dt = \frac{3000}{1 - \frac{1.5}{\rho}} \left(\frac{3000 + t}{3000}\right)^{1-\frac{1.5}{\rho}} \Big|_{t=a}^{a+1000}$$

Rezultati za nekaj različnih prioritet so predstavljeni v tabeli 5.2.

Prioriteta a	$E[I_{(a,a+1000]}]$	$\pi_{1.1}(I_{(a,a+1000]})$	Relativni dodatek	$\pi_{1.2}(I_{(a,a+1000]})$	Relativni dodatek
0	40.1924	53.7974	1.34	68.5991	1.71
5000	10.5066	15.8959	1.51	22.4461	2.14
10000	5.2423	8.4493	1.61	12.5769	2.40
50000	0.6640	1.2913	1.94	2.2479	3.39
100000	0.2467	0.5251	2.13	0.9852	3.99
500000	0.0230	0.0607	2.64	0.1364	5.93
1000000	0.0082	0.0237	2.90	0.0576	7.05

Tabela 5.2: Matematično upanje, tehnična premija in relativni dodatek za sloje z enakim limitom ter različno prioriteto pri $\rho_1 = 1.1$ in $\rho_2 = 1.2$.

Vidimo, da je razlika med relativnim dodatkom pri $\rho_1 = 1.1$ in pri $\rho_2 = 1.2$ precej velika že pri nizkih slojih, se pa z višanjem prioritete razlika še povečuje.

5.4 Optimalno pozavarovanje

Poglejmo si sedaj primer, ko imamo zavarovalnico in pozavarovalnico z indeksoma $\rho_1 > \rho_2 \geq 1$. Zavarovalnica bi tveganje X zavarovala za ceno $\pi_{\rho_1}(X)$, pozavarovalnica pa že za nižjo ceno $\pi_{\rho_2}(X)$. Pozavarovalnica v tem vidi priložnost za zaslužek. Odloči se, da si želi od zavarovalnice za sloj $I_{(a,b]}$ dobiti $C\pi_{\rho_2}(I_{(a,b]})$, kjer $C > 1$

poimenujemo *cenitveni faktor*. Razmerje med cenama, ki ju zavarovalnica in pozavarovalnica zahtevata za zavarovanje infinitezimalnega sloja, je potem

$$\frac{\pi_{\rho_1}(I_{(t,t+dt]})}{C\pi_{\rho_2}(I_{(t,t+dt]})} = \frac{\phi(t;\rho_1,\rho_2)}{C},$$

ki je po izreku 5.11 naraščajoča funkcija t. Poglejmo si še limito

$$\lim_{t\searrow 0} \frac{\pi_{\rho_1}(I_{(t,t+dt]})}{C\pi_{\rho_2}(I_{(t,t+dt]})} = \lim_{t\searrow 0} \frac{S(t)^{\frac{1}{\rho_1}-\frac{1}{\rho_2}}}{C} = \frac{1}{C} < 1.$$

Zaključimo lahko, da obstaja točka d (lahko je tudi ∞), tako da je $\frac{\phi(t;\rho_1,\rho_2)}{C}$ manjše od 1 za vse $t < d$ in večje od 1 za $t \geq d$. To pomeni, da bi za infinitezimalne sloje levo od d nižjo ceno zahtevala zavarovalnica, za sloje desno od d pa bi nižjo ceno zahtevala pozavarovalnica. Idealno se torej zdi, da zavarovalnica *cedira* (zato ji rečemo tudi *cedent*), torej se pozavaruje pri pozavarovalnici, za sloj (d,∞). V praksi se sicer vedno pozavaruje le sloj $(d,\omega]$, kjer je ω neka vrednost, ki je škoda z veliko verjetnostjo ne bo presegla ali pa je ω kar maksimalno kritje. Ta tip pozavarovanja se imenuje škodno presežkovno pozavarovanje in smo ga že spoznali. Vrednosti d rečemo *samopridržaj*, če gledamo s strani zavarovalnice, ali prioriteta, če gledamo s strani pozavarovalnice.

Izrek 5.14. *V optimalnih razmerah samopridržaj d in pozavarovateljev cenitveni faktor C zadoščata naslednjemu pogoju:*

$$\phi(d;\rho_1,\rho_2) = C.$$

1. *Če ima pozavarovatelj cenitveni faktor C, potem je optimalni samopridržaj cedenta enak $d = \phi^{-1}(C;\rho_1,\rho_2)$.*

2. *Če cedent želi imeti samopridržaj d, je optimalni cenitveni faktor pozavarovatelja enak $C = \phi(d,\rho_1,\rho_2)$.*

Dokaz. 1. Pri pozavarovateljevem cenitvenem faktorju C in $d = \phi^{-1}(C,\rho_1,\rho_2)$ velja za vsak $\delta > 0$

$$\pi_{\rho_1}(I_{(d-\delta,d]}) < C\pi_{\rho_2}(I_{(d-\delta,d]}),$$

$$\pi_{\rho_1}(I_{(d,d+\delta]}) > C\pi_{\rho_2}(I_{(d,d+\delta]}).$$

Če bi torej zavarovalnica želela cedirati sloj $(d-\delta,d]$, bi to lahko naredila le za ceno, ko je višja od tiste, ki bi jo postavila sama, kar seveda ni optimalno. Po podobnem razmisleku tudi ni optimalno, če bi zavarovalnica sloj $(d,d+\delta]$ želela zadržati zase. Z izbiro $d = \phi^{-1}(C;\rho_1,\rho_2)$ je skupna premija zavarovalnice in pozavarovalnice najnižja možna.

2. Domnevajmo sedaj, da bi zavarovalnica glede na svoje potrebe izbrala samopridržaj d. Če velja $C > \phi(d; \rho_1, \rho_2)$, obstaja tak $\delta > 0$, da je $\phi(d+\delta; \rho_1, \rho_2) = C$. Torej za sloj $(d, d+\delta]$ velja

$$\pi_{\rho_1}(I_{(d,d+\delta]}) < C\pi_{\rho_2}(I_{(d,d+\delta]}).$$

Za ta sloj torej pozavarovalnica zahteva več, kot bi zanj zahtevala zavarovalnica, zato se slednji tega sloja ne splača cedirati. To pa bi zmanjšalo posel pozavarovalnici, zato je optimalni cenitveni faktor C enak $\phi(d; \rho_1, \rho_2)$.

□

S pozavarovanjem zavarovalnica del tveganja prenese na pozavarovalnico po nižji ceni, kot bi jo zahtevala sama. Zato na konkurenčnem trgu zniža ceno svojega zavarovanja za to razliko, ki pri samopridržaju d znaša $\pi_{\rho_1}(I_{(d,\omega]}) - \phi(d; \rho_1, \rho_2)\pi_{\rho_2}(I_{(d,\omega]})$.

Definicija 5.15. Premija na konkurenčnem trgu za tveganje X je definirana kot

$$\pi_{cm}(X) = \pi_{\rho_1}(I_{(0,d]}) + C\pi_{\rho_2}(I_{(d,\omega]}).$$

kjer je d optimalni samopridržaj, določen po formuli

$$\phi(d; \rho_1, \rho_2) = S_X(d)^{\frac{1}{\rho_1} - \frac{1}{\rho_2}} = C.$$

Za infinitezimalni sloj to pomeni

$$\pi_{cm}(I_{(t,t+dt]}) = \begin{cases} \pi_{\rho_1}(I_{(t+dt]}), & x < d; \\ C\pi_{\rho_2}(I_{(t,t+dt]}), & x \geq d. \end{cases}$$

Trditev 5.16. *Za premijo na konkurenčnem trgu veljajo naslednje lastnosti:*

1.

$$\pi_{cm}(aX) = a\pi_{cm}(X) \text{ za } a > 0;$$

2.

$$\pi_{cm}(I_{(t,t+\delta]}) \geq \pi_{cm}(I_{(u,u+\delta]}) \text{ za } t < u,\ \delta > 0,$$

Dokaz. 1. Za vsak posamezen del že vemo, da je homogen. Pokazati moramo torej samo, da je homogen tudi optimalni samopridržaj. Naj bo d optimalni samopridržaj za X in d_{cm} za aX. Potem rešujemo enačbo:

$$C = S_X(d)^{\frac{1}{\rho_1} - \frac{1}{\rho_2}} = S_{aX}(d_{cm})^{\frac{1}{\rho_1} - \frac{1}{\rho_2}} = S_X\left(\frac{d_{cm}}{a}\right)^{\frac{1}{\rho_1} - \frac{1}{\rho_2}},$$

iz česar lahko zaključimo $d_{cm} = ad$.

2. Za primer, ko sta oba intervala v istem delu, že vemo, da premija za sloje z enakim limitom pada s prioriteto. V primeru, ko bi eden izmed slojev delno padel levo od d in delno desno od d, lahko ta sloj razdelimo na dva dela, tako da bo vsak v celoti bodisi levo od d bodisi desno od d. Če sedaj na enako velike dele razdelimo še drugi sloj, potem vidimo, da je dovolj pokazati zgornjo neenakost le v primeru, ko je sloj $(t, t+\delta]$ v celoti levo od d, sloj $(u, u+\delta]$ pa v celoti desno od d. Za optimalni samopridržaj velja enakost

$$S_X(d)^{\frac{1}{\rho_1}} = C \cdot S_X(d)^{\frac{1}{\rho_2}}.$$

Če sedaj upoštevamo, da je $S_X(t)$ padajoča funkcija, z integriranjem dobimo želeno neenakost.

$\square$

Primer 5.17. Gledamo zavarovanje, kjer je tveganje X porazdeljeno eksponentno s parametrom $\lambda = 5\cdot 10^{-5}$. Naj bo $\omega = 100000$ maksimalno kritje, indeks zavarovalnice $\rho_1 = 1.75$, indeks pozavarovalnice $\rho_2 = 1.5$ in cenitveni faktor $C = 1.3$. Zanima nas, kakšna je cena takega zavarovanja v odsotnosti pozavarovanja, kakšen je optimalen samopridržaj zavarovalnice in kakšno ceno lahko ponudi zavarovalnica, če se odloči za tako pozavarovanje.

$$E[I_{(0,\omega]}] = \int_0^\omega e^{-\lambda t} dt = -\frac{1}{\lambda} e^{-\lambda t}\Big|_0^\omega = 19865$$

Obstoj maksimalnega kritja je torej matematično upanje našega tveganja zmanjšal za 135, saj je matematično upanje X enako $\frac{1}{\lambda} = 20000$. Zavarovanje brez obstoja pozavarovanja bi stalo

$$\pi_{\rho_1}(I_{(0,\omega]}) = \int_0^\omega e^{-\frac{\lambda t}{\rho}} dt = -\frac{\rho}{\lambda} e^{-\frac{\lambda t}{\rho}}\Big|_0^\omega = 32990,$$

kar je približno 1.66-krat toliko, kot je matematično upanje. Da izračunamo optimalni samopridržaj, moramo rešiti enačbo

$$\phi(d; \rho_1, \rho_2) = e^{-\left(\frac{\lambda}{\rho_1} - \frac{\lambda}{\rho_2}\right)d} = 1.3 = C,$$

ki nam da optimalni samopridržaj $d = 38288$. Za zadržani del sedaj zavarovalnica želi 23279, kar je 1.37-krat toliko kot znaša matematično upanje za ta del, ki je enako 17051. Za pozavarovani del pa pozavarovalnica želi $C\pi_{\rho_2}(I_{(d,\omega]}) = 8763$, kar je 3.11-krat toliko kot 2814, kolikor znaša matematično upanje za ta sloj. Zavarovalnica lahko sedaj ponudi zavarovanje za 32042, kar je 948 manj kot brez pozavarovanja.

5.5 Povečanje maksimalnega kritja

Pri nekateri zavarovanjih, kot je na primer zdravstveno zavarovanje v tujini, imamo na voljo neko osnovno maksimalno kritje, ki pa ga lahko zvišamo, če to želimo, seveda na račun višje premije. Pri konceptu *faktorjev povečanja maksimalnega kritja*, ki jih označujemo z ILF (*angl. increased limits factor*), se sprašujemo, za koliko bi se zaradi povečanega maksimalnega kritja morala relativno povečati premija. Pri osnovnem kritju 10000 ga za splošen premijski princip π izračunamo kot

$$ILF(\omega) = \frac{\pi(I_{(0,\omega]})}{\pi(I_{(0,10000]})}.$$

Primer 5.18. Naj bo tveganje X porazdeljeno po Paretu s parametroma $(1.5, 3000)$, naj bo indeks povprečne zavarovalnice enak $\rho = 1.8$ in osnovno maksimalno kritje 10000. Poglejmo si, kakšni so potem ILF na trgu.

$$S_X(t) = \left(\frac{3000}{3000+t}\right)^{1.5}$$

$$E[I_{(0,\omega]}] = \int_0^\omega \left(\frac{3000}{3000+t}\right)^{1.5} dt = \frac{3000}{1.5-1}\left(\frac{3000}{3000+t}\right)^{1.5-1}\Bigg|_0^\omega$$

$$\pi_\rho(I_{(0,\omega]}) = \int_0^\omega \left(\frac{3000}{3000+t}\right)^{\frac{1.5}{1.8}} dt = \frac{3000}{\frac{1.5}{1.8}-1}\left(\frac{3000}{3000+t}\right)^{\frac{1.5}{1.8}-1}\Bigg|_0^\omega$$

Rezultati so predstavljeni v tabeli 5.3.

ω	$E[I_{(0,\omega]}]$	$\frac{E[I_{(0,\omega]}]}{E[I_{(0,10000]}]}$	$\pi_\rho(I_{(0,\omega]})$	ILF
10000	3118	1.00	4983	1.00
25000	4036	1.29	8118	1.63
50000	4573	1.47	11049	2.22
100000	4976	1.60	14451	2.90
250000	5347	1.71	19694	3.95
500000	5537	1.78	24268	4.87
1000000	5672	1.82	29421	5.90

Tabela 5.3: Faktorji povečanja maksimalnega kritja

5.6 Škodna pogostost in škodna intenzivnost

Do sedaj smo ves čas obravnavali porazdelitev zgolj ene škode. Na ta način lahko obravnavamo tudi portfelj, če poznamo skupno porazdelitev škod. Velikokrat pa nas zanima tudi, kakšno premijo bi morali zaračunati, če poznamo ločeno porazdelitev škodne pogostosti in škodne intenzivnosti. Za posamezno škodo namreč ne moremo pričakovati, da se bo njena porazdelitev prilegala kakšnemu znanemu tipu, saj je velika verjetnost, da do škode sploh ne bo prišlo, lahko pa to pričakujemo za škodno intenzivnost. Poglejmo si lemo, ki nam bo pokazala, zakaj lahko ločeno obravnavamo matematično upanje škodne pogostosti in škodne intenzivnosti.

Lema 5.19 (Waldova identiteta, [5, Lemma 10.2.9]). *Naj bo N celoštevilska slučajna spremenljivka iz $L^1(P)$ in X_i med seboj in od N neodvisne in enako porazdeljene slučajne spremenljivke iz $L^1(P)$. Potem velja formula*

$$E\left[\sum_{i=1}^{N} X_i\right] = E[X]E[N],$$

kjer je X enako porazdeljena kot X_i in prav tako neodvisna od N.

To nam da idejo, da lahko ločeno izračunamo tudi "premijo"[2] za škodno pogostost in škodno intenzivnost ter rezultat dobimo kot zmnožek obeh.

$$\pi_\rho\left(\sum_{i=1}^{N} X_i\right) = \pi_\rho(X)\pi_\rho(N)$$

Prednost izbrane metode je, da lahko tisti porazdelitvi, za katero smo bolj prepričani, da je pravilna, dodelimo nižji ρ, manj zanesljivi pa višjega.

Primer 5.20. Naj bo škodna pogostost N porazdeljena po Poissonu s parametrom $\lambda_P = 5$, škodna intenzivnost pa eksponentno s parametrom $\lambda_E = 10^{-4}$. V pravilnost porazdelitve škodne pogostosti smo manj prepričani, zato ji dodelimo višji $\rho_1 = 1.2$, škodni intenzivnosti pa nižji $\rho_2 = 1.1$. Pri Poissonovi porazdelitvi ne moremo izračunati "premije" analitično, zato se poslužimo numeričnih metod. Dobimo $\pi_{\rho_1}(N) = \int_0^\infty S_N(t)^{\frac{1}{\rho}}dt = 5.398$. Pri eksponentni porazdelitvi pa poračunamo:

$$\pi_{\rho_2}(X) = \int_0^\infty e^{-\frac{x}{10000\cdot 1.1}}dt = 10000\cdot 1.1e^{-\frac{x}{10000\cdot 1.1}}\Big|_0^\infty = 11000.$$

Skupna premija je enaka

$$\pi\left(\sum_{i=1}^{N} X_i\right) = \pi_{\rho_1}(N)\pi_{\rho_2}(X) = 59382.$$

Kot alternativno možnost pa lahko s Panjerjevim algoritmom izračunamo porazdelitev agregatnih škod $S = \sum_{i=1}^N X_i$ in uporabimo transformacijo na njej. Pri tem moramo ρ-ja zmnožiti: $\rho_1 \cdot \rho_2 = 1.2 \cdot 1.1 = 1.32$. Na ta način dobimo rezultat $\pi(S) = 59346$. Dobili smo torej nekoliko manjšo vrednost. To se ujema z dejstvom, da je PH premijski princip subaditiven.

Primer 5.21. Poglejmo si primer škodnega presežkovnega pozavarovanja. Za indeks vzamemo $\rho = 1.1$. Obravnavali bomo dva sloja, najprej ločeno, nato pa posebej in sicer enega s limitom 400 nad prioriteto 200, kar označimo s 400 xs 200, in sloj nad njim, torej s prioriteto 600 in limitom 600, kar označimo s 600 xs 600. Ne vemo,

[2] Premijo smo pisali v narekovajih, saj pri škodni pogostosti operiramo s številom škod in ne z monetarnimi zneski.

kakšna je porazdelitev celotne škode, poznamo zgolj porazdelitev škod, ki presežejo 200. Ocenjujemo, da je število teh porazdeljeno Poissonovo s parametrom $\lambda = 4$, višina pa z enoparametrično Paretovo porazdelitvijo s preživetveno funkcijo

$$S_X(t) = \left(\frac{200}{t}\right)^{1.5}, \; t > 200.$$

Iz tega sledi, da je velikost škod na prvem sloju $I_{(200,600]}$, porazdeljena z odrezano Paretovo porazdelitvijo s parametroma $(1.5, 200)$. Preživetvena funkcija je torej enaka

$$S_{I_{(200,600]}}(t) = \begin{cases} \left(\frac{200}{t+200}\right)^{1.5}, & 0 < t < 400; \\ 0, & t \geq 400. \end{cases}$$

Za drugi sloj pa dobimo preživetveno funkcijo

$$S_{I_{(600,1200]}}(t|X > 600) = \begin{cases} \left(\frac{600}{t+600}\right)^{1.5}, & 0 < t < 600; \\ 0, & t \geq 600. \end{cases}$$

Od tu lahko izračunamo, kakšen delež škod, ki sežejo v prvi sloj, seže tudi v drugega:

$$P(X > 600|X > 200) = S_{I_{(200,600]}}(400) = 0.192.$$

Zanimajo nas matematična upanja in "premije" za škodno pogostost in škodno intenzivnost. Za škodno pogostost že vemo, da je $E[N] = \lambda = 4$. Pri računanju $\pi(N)$ si pomagamo z numeričnim integriranjem. Analitično pa lahko izračunamo matematično upanje in $P(X)$.

$$E[I_{(200,600]}] = \int_0^{400} S_{I_{(200,600]}}(t)dt = \int_0^{400} \left(\frac{200}{t+200}\right)^{1.5} dt = \frac{200}{0.5}\left(\frac{200}{t+200}\right)^{0.5}\Big|_0^{400} = 169$$

$$\pi(I_{(200,600]}) = \int_0^{400} S_{I_{(200,600]}}(t)^{\frac{1}{\rho}} dt = \int_0^{400} \left(\frac{200}{t+200}\right)^{\frac{1.5}{1.1}} dt = \frac{200}{1-\frac{1.5}{1.1}}\left(\frac{200}{t+200}\right)^{1-\frac{1.5}{1.1}}\Big|_0^{400} = 181$$

Na drugem sloju vzamemo enako pogostost, pri povprečni škodi pa moramo upoštevati, da za vse primere, ko je prvi sloj zadet, drugi pa ne, velja $Y = 0$. Matematično upanje izračunamo po naslednji formuli:

$$E[I_{(600,1200]}] = 0 \cdot P(I_{(200,600]} < 400) + \int_0^{600} S_{I_{(600,1200]}}(t|X > 600)dt.$$

Za sloj 1000 xs 200, ki ga dobimo, če naša sloja združimo, pa izračunamo po isti formuli kot za prvi sloj. Rezultati so predstavljeni v tabelah 5.4 in 5.5. Vidimo,

	Sloj	Povprečna škoda	Premija	Relativni dodatek
(1)	400 xs 200	169	181	1.08
(2)	600 xs 600	68	82	1.21
(3)	1000 xs 200	237	263	1.11
(1)+(2)	1000 xs 200	237	263	1.11

Tabela 5.4: Povprečne intenzivnosti škod in pripadajoče premije

	Sloj	Povprečna škoda	Premija	Relativni dodatek
(1)	400 xs 200	676	758	1.12
(2)	600 xs 600	272	344	1.26
(3)	1000 xs 200	948	1102	1.16
(1)+(2)	1000 xs 200	948	1102	1.16

Tabela 5.5: Povprečne agregatne škode in pripadajoče premije, ko škodno pogostost in intenzivnost transformiramo ločeno

da so v tem primeru premije aditivne, oziroma da je vseeno ali seštejemo premije za spodnji in zgornji sloj ali pa ves čas delamo le z enim velikim slojem. To je pričakovano, saj je bila škodna pogostost kar enaka, integrala, ki smo ju dobili pri škodni intenziteti pa sta seveda aditivna. Poglejmo si, če to velja tudi v primeru, ko transformacijo napravimo na porazdelitveni funkciji agregatnih škod. Tu moramo uporabiti Panjerjev algoritem. Rezultati so predstavljeni v tabeli 5.6.

	Sloj	Povprečna škoda	Premija	Relativni dodatek
(1)	400 xs 200	675	761	1.13
(2)	600 xs 600	270	343	1.27
(3)	1000 xs 200	948	1094	1.15
(1)+(2)	1000 xs 200	948	1102	1.16

Tabela 5.6: Povprečne agregatne škode in pripadajoče premije, ko transformiramo neposredno porazdelitev agregatnih škod

Tokrat dobimo za vsoto slojev nekoliko drugačen rezultat kot za veliki skupni sloj. Kot smo že povedali, se to zgodi zaradi subaditivnosti naše transformacije.

5.7 Minimalna premijska stopnja za linijo

Z mešanjem dobimo neskončno možnosti različnih transformacij. Lahko pa mešamo tudi znotraj posameznega tipa, v našem primeru PH transformacije. Na ta način dobimo funkcional oblike

$$\pi = p_1\pi_{\rho_1} + p_2\pi_{\rho_2} + \cdots + p_n\pi_{\rho_n},$$

kjer so p_i pozitivna števila in je njihova vsota enaka ena. Tovrstno mešanje bi lahko uporabili pri odločanju uprave, kjer ima vsak član svoj pogled na tveganje, torej svoj indeks ρ, ali pa kot mešanico indeksa na trgu in specifičnega indeksa posamezne zavarovalnice. Poseben primer mešanja je tudi *minimalna premijska stopnja za linijo* (*angl. rate-on-line*). Ta predstavlja minimalni delež premije v limitu in pride v poštev pri visokih slojih, kjer je matematično upanje škode majhno, vendar je ta, ko se pojavi, lahko zelo velika. Pri zavarovanju 10000 xs 10000 bi minimalna premijska stopnja za linijo 0.02 ali 2% pomenila, da mora premija znašati najmanj 200. To lahko zagotovimo z mešanjem poljubnega $\rho_1 \geq 1$ in pa limitnega primera $\rho_2 = \infty$. Naš premijski princip ima tako obliko

$$\pi(X) = (1-p)\pi_{\rho_1}(X) + p\pi_{\rho_2}(X) = (1-p)\pi_{\rho_1}(X) + p \operatorname{ess\,sup}(X),$$

kjer je p minimalna premijska stopnja za linijo.

Primer 5.22. Spomnimo se primera 5.13. Imamo tveganje X, ki bo utrpelo škodo s 5% verjetnostjo. Če se škoda pojavi, je porazdeljena po Paretu s parametroma $(\lambda = 3000, \alpha = 1.5)$. Preživetvena funkcija takega tveganja ima obliko:

$$S_X(t) = P(X > t) = P(X > 0)P(X > t|X > 0) = 0.05\left(\frac{3000}{3000+t}\right)^{1.5}.$$

Izračunajmo matematično upanje in tehnično premijo slojev z različnimi prioritetami in limitom 1000 pri $\rho = 1.1$, če izberemo za minimalno premijsko stopnjo za linijo $p = 0.02$. Računamo enako kot pri primeru 5.13, le da ima sedaj transformiranka obliko

$$S_Y(t) = 0.98 \cdot 0.05^{\frac{1}{\rho}}\left(\frac{3000}{3000+t}\right)^{\frac{1.5}{\rho}} + 0.02.$$

To nam zagotavlja, da je premijska stopnja za linijo vedno vsaj 0.02, v zgornjih slojih pa privede do enormnih relativnih dodatkov, kar je lepo predstavljeno v tabeli 5.7.

Prioriteta a	$E[I_{(a,a+1000]}]$	$\pi_{1.1}(I_{(a,a+1000]})$	Relativni dodatek
0	80.3848	119.0036	1.48
5000	21.0133	49.2533	2.34
10000	10.4846	35.5493	3.39
50000	1.3279	22.3765	16.85
100000	0.4935	20.9663	42.49
500000	0.0460	20.1117	437.29
1000000	0.0163	20.0436	1226.23

Tabela 5.7: Matematično upanje, tehnična premija in relativni dodatek za sloje z enakim limitom ter različno prioriteto pri $\rho_1 = 1.1$ in minimalno premijsko stopnjo za linijo $p = 0.02$.

Literatura

[1] G. Bosi, *Non-Life Insurance Mathematics*, verzija 17. 5. 2014, [ogled 27. 8. 2014], dostopno na `http://ucilnica.fmf.uni-lj.si/pluginfile.php/17405/mod_resource/content/4/Non-Life%20Insurance-3.pdf`.

[2] D. Dennenberg, *Non-Additive Measure And Integral*, Kluwer Academic Publishers, Boston, 1994.

[3] J. Dhaene, M. Goovaerts, *Dependency of risks and stop-loss order*, ASTIN Bulletin **26 (2)** (1996) 201-212.

[4] M. Frechet, *Sur les tableaux de correlation dont les marges sont donnes*, Ann. Univ. Lyon Sect. A, Series **3** (1951) 53-77.

[5] G. Grimmet, D. Stirzaker, *Probability and Random Processes*, Oxford University Press, Oxford, 2001.

[6] W. Hoeffding, *Masstabivariante Korrelationstheorie*, Schriften des mathematischen Instituts und des Instituts für angewandte Mathematik des Universität Berlin **5** (1940) 179-233.

[7] R. Kaas, A.E. van Heerwaarden, M.J. Goovaerts, *Ordering of Actuarial Risks*, CAIRE, Bruselj, 1994.

[8] J. Komelj, *Aktuarsko računanje agregatnih odškodnin in optimalnih parametrov pozavarovanja*, magistrsko delo, Ekonomska fakulteta, Univerza v Ljubljani, 2004.

[9] G.G. Meyers,*The competitive market equilibrium risk load formula for increased limits ratemaking*, Proceedings of the Casualty Actuarial Society **LXXVII**, (1991) 163-200.

[10] H.H. Panjer, *Recursive evaluation of a family of compound distributions*, ASTIN Bulletin **12** (1981) 22-26.

[11] I. Robbin, *Discussion of Meyers' paper-The competitive market equilibrium risk load formula for increased limits ratemaking*, Proceedings of the Casualty Actuarial Society **LXXIX**, (1992) 367-384.

[12] B. Sundt, W.S. Jewell, *Further Results of Recursive Evaluation of Compound*, ASTIN Bulletin **12** (1981) 27-39.

[13] D. Vyncke, *Comonotonicity: the perfect dependence*, doktorska disertacija, Faculteit Wetenschappen, Katholieke universiteit Leuven, 2003.

[14] S. Wang, J. Dhaene, *Comonotonicity, correlation order and premium principles*, Insurance: Mathematics and Economics **22** (1998) 235-242.

[15] S. Wang, *Implementation of PH-transforms in ratemaking*, Proceedings of the Casualty Actuarial Society, **LXXXV** (1998), 940-979.

[16] S. Wang, *Insurance pricing and increased limits ratemaking by proportional hazards transforms*, Insurance: Mathematics and Economics **17** (1995) 43-54.

[17] S. Wang, *Premium calculation by transforming the layer premium density*, ASTIN Bulletin **26**,(1996) 71-92.