UNIVERZA V LJUBLJANI
EKONOMSKA FAKULTETA

OPTIMIZACIJA ENODIMENZIONALNEGA RAZREZA PO SKUPINAH

DOKTORSKA DISERTACIJA

Ljubljana 2013 MIHAEL CESAR

IZJAVA O AVTORSTVU

Spodaj podpisani(-a) MIHAEL CESAR študent(-ka) Ekonomske fakultete Univerze v Ljubljani, izjavljam, da sem avtor(-ica) doktorske disertacije z naslovom Optimizacija razreza po skupinah, pripravljene v sodelovanju s svetovalcem prof. dr. Mirkom Gradišarjem.

Izrecno izjavljam, da v skladu z določili Zakona o avtorski in sorodnih pravicah (Ur. l. RS, št. 21/1995 s spremembami) ne dovolim objave doktorske disertacije na fakultetnih spletnih straneh.

S svojim podpisom zagotavljam, da

- je predloženo besedilo rezultat izključno mojega lastnega raziskovalnega dela;
- je predloženo besedilo jezikovno korektno in tehnično pripravljeno v skladu z Navodili za izdelavo zaključnih nalog Ekonomske fakultete Univerze v Ljubljani, kar pomeni, da sem
  - poskrbel(-a), da so dela in mnenja drugih avtorjev oziroma avtoric, ki jih uporabljam v doktorski disertaciji, citirana oziroma navedena v skladu z Navodili za izdelavo zaključnih nalog Ekonomske fakultete Univerze v Ljubljani, in
  - pridobil(-a) vsa dovoljenja za uporabo avtorskih del, ki so v celoti (v pisni ali grafični obliki) uporabljena v tekstu, in sem to v besedilu tudi jasno zapisal(-a);
- se zavedam, da je plagiatorstvo – predstavljanje tujih del (v pisni ali grafični obliki) kot mojih lastnih – kaznivo po Kazenskem zakoniku (Ur. l. RS, št. 55/2008 s spremembami);
- se zavedam posledic, ki bi jih na osnovi predložene doktorske disertacije dokazano plagiatorstvo lahko predstavljalo za moj status na Ekonomski fakulteti Univerze v Ljubljani v skladu z relevantnim pravilnikom.

Datum javnega zagovora:
Predsednik : dr. Peter Trkman
Svetovalec: dr. Mirko Gradišar
Član: dr. Liljana Ferbar Tratar
Član: dr. Miroljub Kljajić

Ljubljana, 12.6.2013 Podpis avtorja(-ice): _________________

OPTIMIZACIJA ENODIMENZIONALNEGA RAZREZA PO SKUPINAH

Povzetek

Optimizacija enodimenzionalnega razreza po skupinah se vsebinsko uvršča med operacijske raziskave, kjer se prepletajo različne discipline, kot so matematika, ekonomija in informatika.

Problem je praviloma uvrščen v področje diskretnih optimizacij. Kljub temu se različne aktivnosti v povezavi z razrezom odvijajo tudi pri ostalih področjih.

Optimizacija razreza se izvaja z algoritmi, ki z različnimi stopnjami učinkovitosti razrežejo material na zalogi na tak način, ki se zahteva v naročilu. Tako zaloga kot naročilo sta sestavljena iz različnega števila palic različnih dolžin. Učinkovitost algoritmov se praviloma meri s količino neuporabnega ostanka materiala, ki ostane po izpolnitvi naročila. Kadar je izguba materiala minimalna, je problem rešen eksaktno. Eksaktne rešitve je možno izračunati pri manj obsežnih problemih. Ko pa so problemi obsežni, je eksaktno reševanje nemogoče. Takrat se problem rešuje s hevrističnimi algoritmi, ki vrnejo rešitev, ki je blizu optimalni.

Eksaktnih rešitev ni mogoče izračunati zaradi narave problema. Problem praviloma spada v množico *NP*-težkih problemov, kar pomeni, da eksakten algoritem, ki bi rešitev našel v polinomskem času, ni mogoč; razen, če se izkaže, da velja hipoteza *P*=*NP*. Potrditev oz. zavrnitev te hipoteze je eden glavnih matematičnih problemov 21. stoletja.

V doktoratu je obravnavan problem razreza *1/V/D/M* po Dyckhoffovi tipologiji in *MSSCSP* po tipologiji Wäscher *et al*. Za obravnavan problem je nadalje značilno še majhno razmerje med povprečno dolžino palic na zalogi in tistimi iz naročila.

Glavni cilj pri reševanju problema ni le zmanjševanje izgube, temveč so prisotni tudi drugi cilji. Eden izmed slednjih je kontrola izhodnega materiala, ki ga je potrebno zaradi različnih tehnoloških dejavnikov razdeliti v skupine.

K tematiki pristopam postopoma. V uvodu je predstavljena hipoteza doktorata in metodologija.

Pregledu literature, splošnih metod in matematičnih modelov so namenjena tri poglavja, ki k tematiki pristopajo od splošnega področja k podrobnemu. V drugem poglavju se razrez najprej opisuje v kontekstu operacijskih raziskav.

V tretjem poglavju se predstavi področje optimizacij, ki so ožji vsebinski okvir za probleme razreza. Tu je opisana zvezna in diskretna optimizacija. Ključen pa je tudi opis algoritmov, ki predstavljajo glavno metodološko orodje pri reševanju problemov.

Četrto poglavje vsebuje analizo literature vseh obravnavanih področij s poudarkom na problemih razreza. Hkrati predstavljam tudi matematične formulacije za osnovne tipe problemov razreza in povzemam tipologije, ki jih razvrščajo.

Peto poglavje je namenjeno definiciji problema in matematični formulaciji za reševanje razreza po skupinah.

Šesto poglavje predstavlja algoritem, s katerim rešujemo probleme razreza po skupinah.

V sedmem poglavju so predstavljeni rezultati. Najprej je po korakih prikazana rešitev primera iz prakse. Za statistično analizo pa so priložene še rešitve enainosemdesetih avtomatsko generiranih problemov, ki so rešeni po skupinah (po metodi v doktorski dispoziciji), brez skupin in po skupinah po principu, ki je uporabljen pri konkurenčni metodi.

V sklepu povzamem ključne ugotovitve, na podlagi katerih sprejmem hipotezo in predlagam možnosti za nadaljnje raziskovanje.

Ključne besede:
operacijske raziskave, diskretna optimizacija, algoritem, enodimenzionalni problem razreza, *NP*-poln

ONEDIMENSIONAL CUTTING STOCK OPTIMIZATION BY GROUPS

Summary

Onedimensional cutting stock optimization by groups is an important research area in the operations research, which is not an independent scientific discipline, *per se*, but a combination of mathematics, economics and computer science.

Cutting stock problem (*CSP*) is further distinguished as one of the most recognizable problems in the area of discrete optimization. Nevertheless, the cutting activity is not limited only to this area.

The methods for the cutting stock optimization are algorithms. They cut the material in stock so as to obtain the exact number of pieces of demanded lengths. Both stock and order assortment consist of objects (stock) and items (order) of different sizes. The efficiency of algorithms is measured by the level of trim loss. When the trim loss is minimal, the solution to the problem is exact. Such solution can be found for problems, which are not too large. Finding the exact solution for large orders can quickly become impossible. For these instances, the heuristic procedures take place. They calculate the result, which is mostly near-optimal.

The exact solutions are impossible to find due to the nature of the problem, which is believed to be *NP*-hard. That effectively means that it is impossible to find an algorithm that would return the optimal result in polynomial time frame; except if the hypothesis *P=NP* turns out to be valid, which is believed to be highly unlikely. Proving or rejecting this hypothesis is one of the most important objectives of the 21st century for the mathematical community across the globe.

According to Dyckhoff typology, the cutting stock optimization by groups is classified as *1/V/D/M*. More recent typology by Wäscher *et al*. classifies the problem as *MSSCSP*. Moreover, the ratio between average stock and order length is very small.

The main objective is not only to minimize the level of trim loss, but also to perform an effective division of output into groups.

I study this topic in various chapters. In introduction I set a hypothesis and the means to prove or reject it.

The literature, general mathematical models and methods are summarized in three chapters.

In chapter two I make an overview of the operations research.

In chapter three I make a review of optimizations research field (*CSP* is most often studied here). Optimizations can be discrete or continuous. Both of these fields are described. I also describe the algorithms, which are also a methodological framework of this dissertation.

Chapter four includes a detailed analysis of the literature for various research topics with emphasis on *CSP*. I proceed with a literature review. I also present two key typologies for the *CSP* and some general mathematical models.

Chapter five includes the definition of the problem and the mathematical model for cutting stock optimization by groups.

In chapter six I present an algorithm, which is developed for solving the *CSP* by groups.

I present the results in chapter seven. Firstly, I present how the solution of the real-world case is calculated. I proceed with more extensive statistical analysis for eighty one automatically generated cases.

In conclusion I summarize some of the key findings. I use these findings to confirm the hypothesis.

Keywords:
operations research, discrete optimization, algorithm, cutting stock problem, *NP*-complete

KAZALO

KAZALO ALGORITMOV

KAZALO SLIK

KAZALO TABEL

1 UVOD

Naslov doktorske disertacije v slovenskem jeziku:

OPTIMIZACIJA ENODIMENZIONALNEGA RAZREZA PO SKUPINAH

Naslov doktorske disertacije v angleškem jeziku:

ONEDIMENSIONAL CUTTING STOCK OPTIMIZATION BY GROUPS

1.1 Problematika in predmet raziskovanja

Skladno z naslovom doktorske disertacije je postavljena sledeča problematika raziskovanja.

Začetki raziskovanja optimizacije procesa enodimenzionalnega razreza segajo v leto 1939, ko je Leonid Kantorovič kot prvi predstavil model za rešitev problema enodimenzionalnega razreza. Njegov model je imel malo omejitev (predvideva le omejitve materiala). Naslednja pomembna raziskovalna stopnja na tem področju se zastavi, ko se problem začne reševati s pomočjo linearnega programiranja. Dva izmed najbolj citiranih avtorjev na tem področju sta Gilmore in Gomory, ki sta k problemu pristopila z uporabo simpleks metode in sta izsledke svojega raziskovalnega dela objavila v letih 1961/63. Iskanje rešitve pa je pri nekoliko daljših in bolj kompleksnih primerih še vedno zahtevalo preveč časa ali pa je bilo neizvedljivo. Pri obsežnejših primerih se mora izvesti mnogo proceduralnih korakov (npr.: mnogo simpleks korakov in problemov nahrbtnika v eni sami rešitvi) in zaradi polinomske narave problema tudi z današnjo procesno močjo računalnikov nekaterih primerov ni mogoče rešiti v želenem času. Zaradi kompleksnosti in obsega nekaterih problemov, s katerimi se srečujejo podjetja, so pobudo pri iskanju rešitev v naslednjem obdobju prevzeli hevristični algoritmi. Njihov razvoj še ni zaključen. V praksi obstaja mnogo primerov, ki zahtevajo prilagoditev obstoječih algoritmov oziroma razvoj novih.

Enodimenzionalni razrez materiala ima mnogo različnih aplikacij v praksi. Večinoma se ga opredeljuje kot problem, kako iz materiala na zalogi, poenostavljeno lahko govorimo o različnem številu daljših palic različnih dolžin, narezati zahtevano število krajših palic. Problem enodimenzionalnega razreza se pojavlja v mnogih industrijskih procesih, kjer prihaja do problema razreza večjih kosov v manjše s ciljem izpolnjevanja naročil, ki izhajajo iz potreb trga. Pri tem mora nastati čim manj ostanka, ki je opredeljen kot ostanek materiala pri razrezu, ki se ga zaradi premajhnih in neuporabnih dimenzij zavrže (Gass, 1985).

Izhodiščne opredelitve problema in definicije v matematični formulaciji sledijo zgledu, pri katerem je v skladišču na razpolago zadostno število kosov enodimenzionalnega materiala in pri katerem je dolžina palice j (L_j) poznana in poljubna ($L \in \mathbb{R}^+$), vendar se jo vedno opredeli kot celo število. Ta material iz zaloge se nato s ciljem čim manjših ostankov razreže v skladu z naročilom na želene dolžine (l_i) in število kosov (b_i). Pri tem morajo biti izpolnjeni naslednji pogoji: število kosov mora ustrezati naročilu $b_i \in \mathbb{N}^+$ in dolžine posameznih naročenih kosov morajo ustrezati naročilu $l_i \in \mathbb{R}^+$ ($i = 1,2,3 \ldots m$). Gledano v celoti se lahko trdi, da je naročilo izpolnjeno, ko imamo iz razreza zaloge pridobljene vse v naročilu zahtevane kose v želeni količini in dolžini, oziroma ko je proizvedeno zahtevano število kosov ($\sum_{i=1}^{m} \boldsymbol{b_i}$). Pri tem pa se teži k čim manjši porabi zaloge. Ostanek neuporabnega materiala se opredeli kot izguba. V nekaterih primerih, ko je dolžina ostanka (z_j) dovolj velika, pa se jo lahko ponovno umesti med zalogo in po potrebi uporabi kasneje (Alfieri, 2006; Cherri, Areales & Yanasse, 2009; Gradišar, Kljajić, Resinovič & Jesenko, 1999). Problemi razreza, pri katerih je predvidena ponovna uporaba dovolj dolgih ostankov, se označujejo z angleško kratico *CSPUL* (angl. *Cutting Stock Problems with Usable Leftovers*).

Postopek optimizacije razreza poteka tako, da se iz zaloge črpa material za izpolnitev naročila. Postopek sledi ekonomskim ciljem čim nižjih stroškov in predstavlja bistvo proučevanega problema. Eden od pomembnejših pogojev za izpolnitev ciljev optimizacije procesa razreza predstavlja čim manjši ostanek materiala, ki postane zaradi premajhnih dolžin neuporaben in se ga zato zavrže. Podjetja v fazi izdelave načrta razreza iščejo minimum neuporabnega ostanka materiala ($min \sum_{j=1}^{m} \boldsymbol{z_j}$) ob raznih proizvodno in procesno specifičnih zahtevah.

Problem razreza, ko je na voljo dovolj materiala za izpolnitev delovnega naloga, se lahko na podlagi Dyckhoffove (1990) klasifikacije opiše kot *1/V/D/M*, kjer 1 pomeni enodimenzionalni problem, V pomeni pogoj, da so vsa naročila rezultat razreza palic na zalogi, *D* pomeni raznolikost večjih predmetov na zalogi in *M* raznolikost manjših predmetov na strani naročil.

Dyckhoff (1990) tudi navaja naslednje probleme s podobno strukturo, ki se lahko rešujejo z istimi ali vsaj zelo podobnimi metodami:

- problemi razreza in problemi zmanjševanja odpadka,
- problemi pakiranja (kako določene predmete tako razporediti v določen prostor, da bo najmanjši del prostora ostal neizkoriščen),
- problemi nakladanja npr. na palete, v zabojnike ali na vozila,
- problemi razporeditve, sortiranja, razvrščanja,
- določanje urnika pri večprocesorskih računalnikih, razporejanje kapitala.

Dyckhoffova tipologija je bila nato razširjena še s časovno dimenzijo, ki jo vpeljeta (Trkman & Gradišar, 2007). Prenovljeno klasifikacijo nato predstavijo tudi Wäscher, Haussner & Schumann (2007). Posodobljena tipologija deli probleme razreza glede na različne kriterije, kot so: število različnih dolžin, razmerja med (povprečno) dolžino materiala na strani naročil in zaloge, značilnosti kosov pri naročilu in na zalogi. Druga bistvena značilnost prenovljene klasifikacije je ta, da se ukvarja z različnimi načini reševanja optimizacije procesov razreza. Poznamo:

- eksaktne in
- hevristične metode.

Eksaktne metode vodijo do najboljše možne rešitve. Pri zahtevnejših problemih te metode le redko pridejo v poštev zaradi pomanjkljive računske moči računalnikov, ki rešitev iščejo predolgo. Hevristične metode pa ne zagotavljajo vedno optimalne rešitve, vendar pa privedejo do rezultatov v sprejemljivem času.

Zanimanje raziskovalcev na področju optimizacije razreza je v zadnjem obdobju usmerjeno v reševanje primerov, s katerimi se srečujejo podjetja. Pozornost je rezultat dejstva, da se v praksi podjetja srečujejo s specifičnimi problemi, pri katerih standardne metode ne pridejo v poštev, temveč jih je potrebno najprej prilagoditi ali pa razviti nove. Kljub dokaj jasni definiciji enodimenzionalnega razreza v poslovnem svetu obstaja veliko število raznovrstnih primerov. Običajni cilj pri pripravi načrta za proces enodimenzionalnega razreza je zmanjšanje izgube materiala. To pa ni edini cilj. Izhodiščni cilji so lahko nižji stroški, krajši čas razreza, nižje število menjav ali nastavitev rezila, zmanjšanje zaloge, prilagoditev razreza za potrebe logistike in podobno. Nekatere metode obravnavajo več naročil in iščejo optimum v zaporednih časovnih obdobjih (Trkman & Gradišar, 2007) ali pa temeljijo na odločitvah, katero od prejetih naročil je najbolje izvršiti v danem trenutku glede na omejitve stroja za rezanje in druge omejitve (Alves *et al.*, 2008).

V praksi srečujemo tudi velika naročila. To so takšna naročila, ki so prevelika, da bi jih lahko izvedli v enem koraku (Jain, 2008), zato je potrebno celotno naročilo razdeliti na manjše dele, ki morajo biti razviti za konkretne praktične primere s specifičnimi pogoji. V primeru, ki ga opisuje (Jain, 2008), te zahteve izhajajo iz naslednjih dejavnikov:

- Tehnične značilnosti stroja.
    - Zaradi velikih dolžin palic in omejenega prostora v okolici stroja ni mogoče izpolniti obsežnih naročil v enem kosu.
- Povezovanje različnih oddelkov podjetja in skupno načrtovanje razreza.
- Upoštevanje zahtev v več oddelkih (npr.: proizvodnja in logistika):
    - Palice, ki so daljše od mejne dolžine, ni možno dostaviti drugače kot s posebnim vozilom, zato se jih kombinira v skupino podobnih dolžin.

- Skupina palic ne sme preseči določene teže, ki je običajno nosilnost določenega tipa vozila.

Metoda, ki trenutno rešuje problem razreza v omenjenem primeru, ima tri osnovne pomanjkljivosti:

1. ustvarja preveč nepotrebnega ostanka,
2. ne zagotavlja izpolnitev vseh zahtev,
3. ni v celoti računalniško podprta.

Drugih metod, ki bi obravnavale podobne probleme, v literaturi ni zaslediti. Zato se bom v doktorskem delu posvetil razvoju nove metode enodimenzionalnega razreza, ki bo reševala izpolnitev naročila po delih oziroma po skupinah palic ob upoštevanju naslednjih značilnosti oziroma omejitev:

- Problem razreza bo temeljil na primerih z nizkim količnikom med povprečno dolžino palic na zalogi in na strani naročil (razmerje pod 3:1).
- Problem se bo razširil z uporabo dodatnih omejitev, ki so prisotne v industriji pri vpeljavi skupin, in sicer: omejeno število različnih palic v skupini; omejena skupna dolžina palic v skupin.
- Ostanki razreza, ki so daljši od določene mejne dolžine, se vrnejo v skladišče.
- Količina materiala na zalogi ne presega celotnega naročila za več kot določen odstotek.

Rešitev bom iskal ob upoštevanju naslednjih predpostavk:

- Več kot je materiala na zalogi, boljši je rezultat in nižje so izgube.
- Količnik med skupno dolžino palic na zalogi in skupno dolžino naročil vpliva na kakovost rešitev.
- Količnik med povprečno dolžino palic na zalogi in naročenih palic vpliva na uspešnost pri iskanju rešitev.
- Povprečna izguba materiala v procesu razreza (na enoto naročila) je indikator, ki v vmesnih korakih omogoča primerjavo delnih rešitev.
- Ponovna uporaba ostankov nad določeno dolžino vodi do boljših rešitev.
- Vpeljava skupin pomeni več izgub materiala v procesu proizvodnje, vendar se njena smiselnost lahko utemeljuje v povezavi s tehnološkimi značilnostmi v proizvodnji (kapaciteta stroja) in z ostalimi procesi podjetja (npr. logistika).

Pri raziskavah na tem področju se pojavijo številna pomembna vprašanja kot na primer:

- Kako oblikovati skupine, da bo prišlo do čim manjšega povečanja nepotrebnega ostanka?

Išče se postopek, ki bo razrezan material delil v skupine. Pri tem pa ne sme prihajati do bistveno večjih izgub materiala. Hkrati pa morajo biti skupine prilagojene potrebam logistike (največja dovoljena teža, največje dovoljeno število kosov, največje število različnih dolžin palic itd.).

Rešitev bom oblikoval postopoma. Najprej bom oblikoval splošno metodo obravnave velikih naročil, nato pa bom postopoma dodajal omejitve, ki bodo na koncu enake omejitvam konkretnega praktičnega primera. S tem bo dobljena metoda širše uporabna.

1.2 Znanstvena hipoteza

Postavljena je naslednja znanstvena hipoteza:

Možno je oblikovati takšno metodo optimizacije enodimenzionalnega razreza, ki bo omogočala razdelitev velikega naročila na manjše dele, tako da bodo dobljeni rezultati boljši od rezultatov obstoječe metode.

1.3 Namen in cilj raziskovanja

Cilj doktorske disertacije je prispevek k razvoju znanosti na področju optimizacije enodimenzionalnega razreza z razvojem nove metode za obravnavanje velikih naročil.

Namen doktorske disertacije je:

1. analizirati odprta raziskovalna vprašanja, identificirati trenutno stanje in kritično ovrednotiti obstoječo metodo na področju procesa optimizacije enodimenzionalnega razreza po skupinah;
2. postopno oblikovati lastno metodo reševanja problema enodimenzionalnega razreza za velika naročila, tako da bo najprej splošna, s postopnim dodajanjem omejitev pa bo postajala vedno bolj prilagojena konkretnemu praktičnemu primeru;
3. preskusiti predlagano rešitev na primerih iz prakse;
4. analizirati učinkovitost metode.

Namen doktorske disertacije je tudi nadgraditev teoretičnih spoznanj o zniževanju izgube materiala ter celotnih stroškov pri razrezu materiala.

1.4 Metode raziskovalnega dela

Doktorska disertacija vključuje povzema več matematičnih modelov in metod, s katerimi se pristopa k znanstvenoraziskovalni obravnavi.

Obstoječe stanje na danem znanstvenem področju se bo ugotovilo z obsežnim pregledom literature, pri čemer se bo analiziralo metode za podobne probleme enodimenzionalnega razreza.

Za oblikovanje nove rešitve bom uporabil kombinacijo eksaktne in hevristične metode.

1.5 Znanstveni prispevek doktorske disertacije

Kot rezultat raziskave pričakujem doprinos k ekonomski znanosti pri:

- pridobivanju znanstvenih spoznanj o raznovrstnosti primerov optimizacije enodimenzionalnega razreza ter o smereh nadaljnjega razvoja na tem področju;
- oblikovanju nove metode optimizacije razreza pri velikih naročilih;
- z razvito metodo vzpostaviti raven učinkovitosti, ki bo služila za referenco ostalim raziskovalcem.

1.6 Uporabnost rezultatov raziskovanja

Rezultati raziskave bodo temeljili na teoretičnih in praktičnih primerih ter bodo dostopni vsem, ki se soočajo s problemom optimizacije razreza materiala.

Doktorska disertacija bo vključevala opis razvite metode optimizacije razreza z vsemi podrobnostmi, ki bodo omogočale neposredno uporabo predlagane metode v praksi.

1.7 Obrazložitev strukture doktorske disertacije

Rezultati raziskovanja bodo v doktorski disertaciji predstavljeni v devetih med seboj povezanih delih.

Vsaka doktorska disertacija, ki predstavi novo metodo, ima v osnovi naslednjo sestavo:

- uvod;
- teoretski okvir, kjer se:
    - povzame in analizira literaturo,
    - predstavi matematične formulacije glavnih kategorij problemov,
    - povzame metode reševanja;
- matematično formulacijo problema;
- predstavitev metode za reševanje problema;

- prikaz rezultatov;
- sklep ali zaključek.

V uvodu sem predstavil problem enodimenzionalnega razreza po skupinah. Postavil sem znanstveno hipotezo. Pri tem sem naštel izhodiščne cilje raziskovanja. Za dosego teh ciljev so v literaturi že znane različne znanstvene metode. Metode bodo predstavljale izhodiščno točko in oporo pri razvoju nove, s katero bo možno potrditi postavljeno hipotezo.

Teoretski okvir za probleme obsega več poglavij. Pri teoriji bom najprej opisal splošno področje, *i.e.*, področje operacijskih raziskav. Predstavil bom štiri glavna področja in za vsakega od njih poiskal stične točke z aktivnostjo razreza.

Tretje poglavje bom namenjenil optimizacijam. Tu bom predstavil zvezno in diskretno optimizacijo. Ključen del je opis algoritmov, ki predstavljajo glavno metodološko orodje pri reševanju problemov na področju diskretne optimizacije, kot so problemi pakiranja in razreza.

S četrtim poglavjem bom prešel na analizo literature obravnavanih področij s poudarkom na problemih razreza. Literaturo bom najprej analiziral, nato pa povzel. Hkrati bom predstavil tudi matematične formulacije za osnovne tipe problemov razreza in povzel tipologije, ki jih razvrščajo.

Peto poglavje bom namenil definiciji problema in matematični formulaciji v kontekstu optimizacije razreza po skupinah.

Šesto poglavje bo predstavljalo algoritem, s katerim rešujemo probleme razreza po skupinah.

V sedmem poglavju bodo predstavljeni rezultati. Najprej bo po korakih prikazana rešitev primera iz prakse. Za statistično analizo bodo priložene še rešitve 81 avtomatsko generiranih problemov, ki so rešeni po skupinah, izven skupin in po naključnih skupinah.

Vse skupaj bom povzel v sklepu, in sicer v osmem poglavju.

2 OPERACIJSKE RAZISKAVE (LITERATURA IN METODE)

Pričujoča doktorska disertacija in v njej predstavljene raziskave se vsebinsko uvrščajo med operacijske raziskave. Prispevek k znanosti in dodana vrednost industriji je osredotočena na optimiziran razrez materiala z eno pomembno dimenzijo in po skupinah.

K opisu tematike pristopam od splošnega k podrobnemu, torej od opisa operacijskih raziskav (to poglavje) preko izbranih in ustreznih (pod)področij do problema razreza preko skupin (naslednja poglavja).

Operacijske raziskave[1] so področje (in ne samostojna znanstvena veda *per se*), pri katerem se uporablja tehnike in orodja različnih ved, večinoma matematike, ekonomije in informatike, ki predstavljajo kvantitativno osnovo za sprejemanje odločitev v sklopu nekega sistema oz. organizacije. Pomembna značilnost področja operacijskih raziskav je dejstvo, da se osredotočajo na učinkovito rabo tehnologije v organizacijah. Tu prihaja do ključne razlike v povezavi do ostalih znanstvenih disciplin in področij, ki največjo težo pripisujejo tehnologiji, njena uporaba v organizacijah pa je drugotnega pomena (Hiller & Lieberman, 2002; Banker & Kauffman, 2004).

Operacijske raziskave so se najprej začele izvajati na vojaškem področju. Prvi pomemben dosežek te znanstvene discipline predstavlja razvoj radarskih sistemov v Veliki Britaniji v sklopu vzpostavitve protiletalske obrambe leta 1937 (Crowther & Whiddington, 1947; Rowe, 1948). S tem znanstvenoraziskovalnim projektom, ki je zaposloval nekaj tisoč raziskovalcev, se je začela moderna doba te znanstvene discipline, katere tehnike so sedaj prisotne pri reševanju problemov v različnih panogah (McCloskey & Trefethen, 1954; Ackoff & Sasinieni, 1968).

Reševanje problemov na področju operacijskih raziskav je svojevrstno z značilnim metodološkim konceptom. Večina znanstvenih raziskav je do 20. stoletja temeljila na laboratorijskih raziskavah. Tak način raziskovanja in posledično tudi način eksperimentiranja pa je za preučevanje kompleksnejših sistemov (organizacij) neprimeren iz več razlogov, med katerimi je poleg stroškov in etike najbolj odločilna nepraktičnost. Te prepreke so se elegantno premostile z uporabo modelov, ki predstavljajo pomembno noviteto v raziskovalnem in znanstvenem smislu. Modeli temeljijo na temeljitem opisu in posnemanju realnosti oz. realnih sistemov (organizacij), ki se jih raziskuje. Na izdelanem modelu se izvaja eksperimente, za katere se je na tem področju uveljavilo ime »simulacije«, in ustrezne metode, ki vodijo do potrebnih zaključkov in rezultatov, katerih kredibilnost narašča s kvaliteto in podrobnostjo modela (Churchman, 1961; Ackoff, 1962; Godfrey-Smith, 2003).

---

[1] Angleško: »Operations research«, »Operational research«, »Management science« ali »Decision science« (Bernard, 1993; Nicolai & Seidl, 2010; Encyclopedia Britanica, 2013). Nemško: »Operations research (literatura dosledno že ves čas uporablja angleški izraz npr.: Churchman *et al.*, 1968 ali Sauer, 2009). Špansko: »Investigación de Operaciones« ali »Investigación Operativa« (Ríos 1956; Vidal, 2010). Portugalsko: »Investigação operacional« ali »Pesquisa operacional« (Correia Baptista Soares de Mello, 2001; Shimizu, 1984). Rusko: »Исследование операций« (Afanasiev *et al.*, 2006; Taha, 2007).

V splošnem se postopki reševanja na osnovi modelov delijo na deduktivne, induktivne in hibridne (Haruvy & Stahl, 2004; Fereday & Muir-Cochrane, 2006; Fusco & Caglioni, 2011). V zadnjem času se v raziskavah uporabljajo še normativni kriteriji pri odločanju kot na primer pri (Drake *et al.*, 2011) ali pri (Tate *et al.*, 2011).

Normativni pogled - samostalnik norma prihaja iz latinščine: lat. sam. *norma*; v izvoru pomeni tesarjev kvadrat, merilo ali standard (Etymology dictionary, 2013) - se pri reševanju problemov osredotoča na želene etično-moralne standarde, ki jih mora rezultat vsebovati. Normativna optimizacija se uporablja v socialnih konotacijah, pri katerih so v ospredju ljudje. Cilji take optimizacije so družbena blaginja, zadovoljstvo, sreča, pravni red itd (Lyall *et al.*, 2011).

Deduktivno reševanje je drugi sklop postopkov značilnih za področje operacijskih raziskav. Izraz dedukcija prihaja iz latinščine (iz lat. glag. *deductio*) in je analogen logičnemu sklepanju (Etymology dictionary, 2013). Rezultat dedukcije je neizpodbiten[2]. Deduktivno sklepanje ima več različic oz. zakonov. Na zakon o nepristranskosti se opira tudi ta doktorska disertacija. Logična struktura je naslednja:

h (predikat 1, izjava, hipoteza)
$h \rightarrow z$ (predikat 2, dokazni postopek)

———

z (sklep, zaključek)

Če je hipoteza (h) resnična in preverljiva izjava, potem je tudi zaključek (z) pravilen.

Na tej točki omenjam še princip *lex parsimoniae* (lat.), ki pravi, da je med naborom različnih hipotez za določeno stvar najustreznejša tista, ki vsebuje najmanj predpostavk.

Zakon o silogizmu oz. logiki ima podobno strukturo (Jevons, 2010):

če velja $A \subset B$

in če velja $B \subset C$

potem velja tudi $A \subset C$.

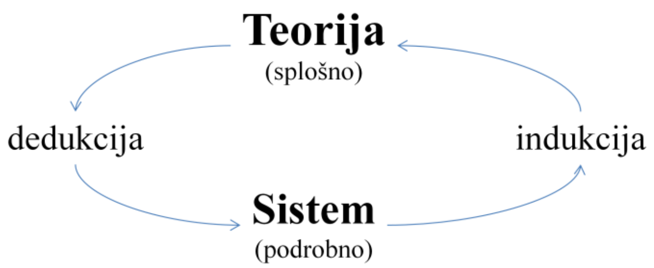
Dedukcija na področju operacijskih raziskav poteka direktno od modela do rešitve z uporabo ustrezne simbolne ali numerične notacije, ki izvira iz matematike (primer: kalkulacija). Analitični postopek za iskanje rešitev se imenuje algoritem (Encyclopedia Britanica, 2013)[3].

[2] Z neizpodbitnimi dokazi (ang. *irrefutable*) se je v filozofiji znanosti uveljavil Karl Popper (1902-1994). Popper je trdil, da so v tem kontekstu nujne pogojne izjave, ker zaradi svoje (tavtološke) narave vedno vodijo do neizpodbitnih zaključkov (za več informacij gl. Stove, 1982 ali Gattei, 2009).
[3] Pri računanju rešitev sem algoritem urporabil v doktorski disertaciji.

Model je pogosto lahko tako kompleksen, da opisano eksaktno reševanje ni smiselno. V takih primerih je model še vedno izhodišče za reševanje problema, drugačen pa je postopek reševanja, ki temelji na principu zadovoljivih rešitev, ki so sicer lahko optimalne, vendar največkrat le po naključju. Tak postopek je hevrističen[4] (Edelkamp & Schrödl, 2011).

Induktivni postopki - izraz indukcija izhaja iz lat. glag. *inductio* in pomeni »voditi do« (Etymology dictionary) - za razliko od deduktivnih potekajo iz podrobnega k splošnemu[5] (gl. sliko 1 v nadaljevanju). Induktivna logika za razliko od deduktivne določenim sklepom pripisuje stopnjo verjetnosti. Induktivno sklepanje je značilno za okoliščine, kjer ni možno zagotoviti kontroliranih laboratorijskih eksperimentov. Zaključki zato niso neizpodbitni. Vedno je odprta možnost za nove naknadne korekture in izboljšave ter za drugačno uporabo od prvotno zamišljene (Lyall et al., 2011). Postopki in tehnike reševanja problemov na področju operacijskih raziskav so ponavljajoči in vsebujejo več zaporednih korakov, pri čemer se beležijo in izboljšujejo že pridobljene izračunane rešitve do trenutka, ko je dosežena optimalna rešitev ali ko nadaljnjega ponavljanja ni več mogoče utemeljiti. Utemeljitev je sprejemljiva, če so koristi hipotetično boljše rešitve večje od stroškov[6], ki bi nastopali pri njenem nadaljnjem iskanju (Cussens, 2011; Encyclopedia Britanica, 2012).

Slika 1: Uporaba deduktivnih in induktivnih metod



Vir: Povzeto po Godfrey-Smith, 2003; Dusek, 2006; Jevons, 2010 in Cussens, 2011.

Nekatere metode oz. algoritmi so kombinacija deduktivnih in induktivnih postopkov in so torej hibridne narave (primeri so prisotni v različnih panogah, značilni so tudi za informacijske vede (Galitsky & Pampapathi, 2003; Fereday & Muir-Cochrane, 2006; Brixey et al., 2007).

Na področjih linearnega (Renegar, 1987), nelinearnega (Wächter & Biegler, 2006) in dinamičnega programiranja (Simão et al., 2009) nastopajo algoritmi, ki bazirajo na matematični teoriji. Simulacije (Tsuyoshi et al., 2010) in eksperimentalno programiranje (Alt *et al.*, 2002) pa spadajo med iterativne postopke, ki gradijo na statistični teoriji.

[4] Ilustrativni primer je igra šah (*black box model* z dvema igralcema), kjer računalnik išče »zadovoljive« rešitve, ko se odloča za določeno potezo in ne igra optimalne igre (podobno velja za igre »*go*« in »*shogi*«, kjer je računalniški način igre za razliko od šaha še vedno v podrejenem položaju) (Masahiro *et al.*, 2001; Iqbal, 2010). Delovanje sistemov in organizacij pa je lahko še zahtevnejše, kar med drugim kaže tudi znanstvena literatura (Best *et al.*, 1996; Honhon *et al.*, 2010; Dollevoet & Huisman, 2011 in številni drugi).

[5] Filozofija znanosti tu ponuja veliko bolj detajlno definicijo (eden izmed bolj aktivnih predstavnikov filozofije znanosti na tem področju je škotski filozof David A. Hume). Za več informacij gl. (Dusek, 2006).

[6] V tem smislu se lahko govori o *»cost & benefit«* analizi, s pomočjo katere se sprejme končni rezultat.

Področje operacijskih raziskav se deli na več medsebojno povezanih podpodročij. V grobi obliki jih predstavlja slika 2. Najbolj reprezentativna podpodročja[7] so naslednja:

1. verjetnostni modeli,
2. sistemi v proizvodnji,
3. management oskrbovalne verige,
4. optimizacija.

2.1 Verjetnostni modeli

Verjetnostni modeli[8] predstavljajo eno izmed glavnih podpodročij operacijskih raziskav. Ti modeli zajemajo obravnavo stohastičnih[9] procesov v kompleksnejših sistemih ali organizacijah. Zaradi stohastičnosti procesov je večinoma znano le izhodiščno stanje, nadaljnji razvoj procesov pa je možen na več načinov, ki se jih v modelih elegantno opiše z verjetnostnimi porazdelitvami (Papoulis & Pillai, 2001). V praksi je potek stohastičnih procesov možno opisati v diskretnem in v neprekinjenem času (zvezni stohastični procesi).

V diskretnem času je poznanih več različnih problemov, ki se opisujejo po principu Markovih verig[10]. Pomembnejša med njimi sta naslednja:

- **Razvejani procesi**

Znanstveno področje osredotočeno na sisteme, pri katerih so stanja X_0, X_1 ... X_n porazdeljena v diskretnem času. Znano je le začetno stanje X_0, ostalim stanjem pa je podana le ocena verjetnosti. Razvoj prihodnih stanj je s časom vedno bolj razvejan in je različen od primera do primera. Možni primer prikazuje slika 3.

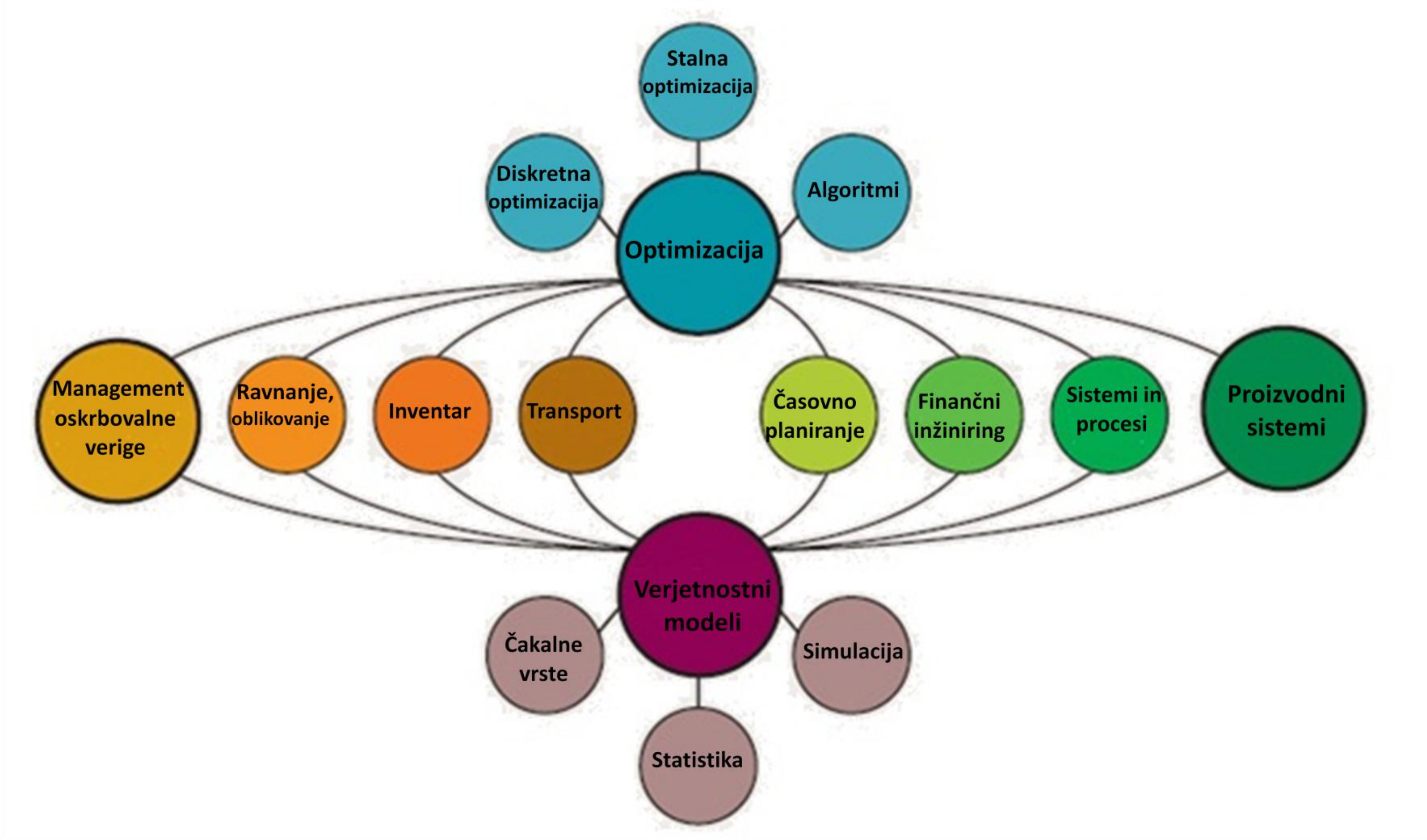
Primeri so raznovrstni in segajo od preučevanja razvoja fraktalnih krivulj (Peitgen *et al.*, 2004) in radioaktivnih razpadov elementov, kjer se predvideva število nastalih nevtronov pri razpadu atomskega jedra, do genealogije, kjer se študira, koliko generacij obstaja določen priimek (Haigh, 2002), in razvrščanja zadetkov pri spletnem iskalniku Google (Page *et al.*, 1999).

Pri razrezu materiala je podobna sporadičnost prisotna pri asortimentu naročil[11] in pri številu uporabnih ostankov (angl. *reusable leftovers*) (Gradišar *et al.*, 2011; Gradišar & Tomat, 2013).

---

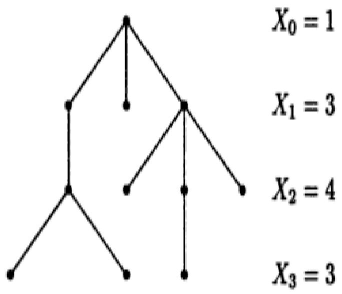
[7] Vsa ta področja so vsaj v posredni povezavi z optimizacijo razreza materialov.
[8] Angl. »*probability models*« (Sheldon, 1997 ali Haigh, 2002).
[9] Naključnih.
[10] Angl. »*Markov chains*« (gl. Markov, 1971) po ruskem matematiku Andreju Markovu (1856-1922).
[11] Posamezne postavke naročila imajo stohastično naravo, kar pomeni, da niso poznane vnaprej (je zelo pomembno pri testiranju metod s tega področja).

Slika 2: Pomembnejša področja operacijskih raziskav



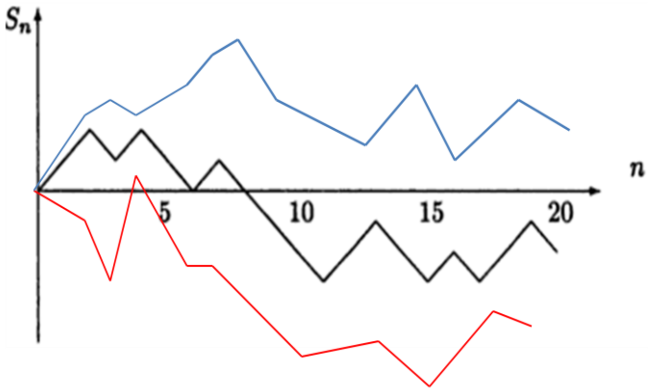
Vir: Bilkent University, 2012.

Slika 3: Generacije, razvejani procesi



Vir: Haigh, 2002, str. 140.

Slika 4: *Random walk*



Vir: MacKenzie, 2006, str. 57-67 (povzeto).

- *Random walk* procesi

Random walk proces je matematično opredeljen kot naključni proces, ki vsebuje več zaporednih korakov.

Proces je prisoten v različnih znanstvenih disciplinah. Praktični primeri so različni, in sicer od modelov za gibanje molekul v tekočinah in plinu (Walklate, 1987) in kvantne fizike (Rudinger et al., 2012)[12] do modelov, ki posnemajo nihanje borznih tečajev (Hashimoto et al., 2010). Primer ponazarja slika 4, pri čemer je n diskretni čas in S_n vrednost.

Pod področje *random walk* procesov spada tudi ulivanje tekočega železa (jekla) v železarnah. To je ena izmed ključnih aktivnosti pred razrezom, od katere je odvisna kvaliteta jekla[13] (Aneziris *et al.*, 2009; Gazder *et al.*, 2010; Hansson & Jansson, 2010; Reggiani *et al.*, 2010; Dou *et al.*, 2011b in Dou *et al.*, 2011a).

[12] Članek je zanimiv tudi s stališča problemov tipa *P*, *NP* in ostalih v sklopu kompleksnostne teorije, kar bo opisano v nadaljevanju pri diskretni optimizaciji.

[13] Gibanje tekočin je pomembna tema v sklopu strjevanja kovin (npr. jeklo) in posledično formiranja kristalov, pri čemer nastajajo mikroskopsko majhne razpoke, ki povzročajo poroznost materije in posledično nižjo kvaliteto. Znanstvenoraziskovalno področje: ulivanje kovin. V železarnah je to eden pomembnejših procesov pred razrezom (Kovačič & Šarler, 2009). Na to temo je bil organiziran seminar vključno z obiskom in analizo proizvodnje v podjetju Štore Steel ter predavanji (tudi osebna komunikacija z Mihom Kovačičem); gl. (Kovačič, 2011). To je hkrati tudi primer razreza z giljotno (zaradi ulivanja je dolžina palice spremenljivka).

Zvezni stohastični procesi se v osnovi delijo na naslednja področja:

- Teorija čakalnih vrst

Čakalne vrste so prisotne v različnih panogah, med katerimi so najbolj zastopane telekomunikacije, računalništvo, proizvodnja[14], promet in zdravstvo (Sommereder, 2008). Pri teh panogah se poskuša matematično opredeliti konkreten čakalni sistem, pri čemer se poskuša kontrolirati čas čakanja in število čakajočih ter predvidevati stanje sistema na določen trenutek, npr. prazen, delno obremenjen in zaseden (Brémaud, 1999).

- Teorija obnove (angl. *renewal theory*)

Teorija obnove se ukvarja s procesi, kjer ponavljanje dogodkov igra osrednjo vlogo. Pri tem je ključen čas (tudi število korakov), ki je potreben za doseg določenega stanja. Ta teorija ima več aplikacij v praksi, od napovedovanja mobilnosti v brezžičnih omrežjih (Abu-Ghazaleh & Alfa, 2010), internetnega prometa (pojav anomalij, tudi odkrivanja DoS[15] napadov) (McPherson & Ortega, 2011) do načrtovanja proizvodnje (optimalen čas do zamenjave strojev) (Tai & Ching, 2005). Torej je tematika v tej točki povezana tudi z razrezom.

- Wienerjev proces

Wienerjev proces je dobil ime po matematiku Norbertu Wienerju. Wienerjev proces se odvija zvezno (glavna razlika od *random walk* modelov). Naključne spremembe pri gibanju procesa[16] so opisane z verjetnostnimi porazdelitvami, ki so različne; od normalne porazdelitve do Levy porazdelitve, ki med drugim nastopa pri izvedenih finančnih inštrumentih (Podobnik *et al.*, 2011)[17].

Analize stohastičnih procesov, zlasti kadar je potrebna medsebojna primerjava raziskav[18], potekajo tudi s pomočjo statistike in simulacij[19]. Oba področja sta že bila omenjena in bosta podrobneje predstavljena še pri metodologiji v sklopu tega doktorskega dela.

---

[14] Pri obsežnejših problemih enodimenzionalnega razreza lahko v praksi pride do ozkih grl pri rezalnih strojih in s tem do čakalnih vrst na strani zaloge (Erjavec *et al.*, 2009).
[15] *DoS* (angl. *Denial of Service*) pomeni ohromitev storitve (vir: ISlovar) oz. hekerski napad na strežnik.
[16] Gre za Brownovo gibanje (gl. Magdziarz *et al.*, 2009).
[17] Ta in podobna znanstvena dela so pomemben prispevek pri pojasnjevanju finančne krize, ki se je začela leta 2008.
[18] Benchmark.
[19] V nadaljevanju bom predstavil, da se znanstveno področje pakiranja in razreza večinoma uvršča med optimizacije. Neglede na to pa so lahko za določitev učinkovitosti optimizacijskih metod običajno potrebne še simulacije (za določitev benchmarka).

2.2 Proizvodni sistemi

Področje proizvodnih sistemov je ena od glavnih tem, ki nastopajo v okviru operacijskih raziskav. Proizvodni sistem je definiran kot podsistem poslovnega procesa, ki nadzoruje potek reševanja določenega problema, katerega cilj je izdelek. Vsak proizvodni sistem je sestavljen iz specifičnih proizvodnih pravil, delovnega spomina in nadzornih mehanizmov (McDermott, 1982).

Pod vsebinski koncept področja proizvodnih sistemov je možno uvrstiti tudi naslednja področja:

- Sisteme in procese (sistemi kot strojna oprema in tehnologija)

To podpodročje igra pomembno vlogo v večini od aplikativnih operacijskih raziskav. Pri razrezu materiala se je razvoj najprej začel na tem področju, kar dokazuje zajeten spisek patentov na tem področju. Patenti s področja razreza bodo predstavljeni v nadaljevanju pri pregledu pomembne literature.

- Finančni inženiring[20]

Finančni inženiring je pojem, pod katerim se razume načrtovanje uporabe ustreznih finančnih inštrumentov za dosego nekega poslovnega cilja (Finnerty, 1988; Galitz, 1995, str. 1-15). Omenjeno je zelo pomembno pri razrezu materiala, saj je cena na trgu surovin lahko volatilna in nepredvidljiva. V povezavi z razrezom je najbolj reprezentativen trg kovin. Podjetja se zato poslužujejo terminskih pogodb, s katerimi vnaprej na določen datum v prihodnosti fiksirajo ceno[21].

- Časovno planiranje (sestava urnikov)[22]

Časovno planiranje se v sklopu operacijskih raziskav prvenstveno označuje kot odločitveni proces in igra pomembno vlogo v večini proizvodno naravnanih panog in procesov ter v okoljih ali sistemih, kjer se procesirajo informacije. Časovno planiranje je prisotno tudi v storitvenem sektorju, zlasti v panogah transporta in distribucije blaga (Pinedo, 2012, str. 1-6). Iskanje optimalnega urnika za procese v proizvodnji je zelo kompleksen in matematično dokazan *NP*-poln problem (Pinedo, 2012, str. 27 in 603-604). Slednje z vidika uporabe metod v praksi pomeni, da je lahko časovno planiranje po svoji naravi eksaktno (pri manj obsežnih problemih) ali hevristično (pri bolj obsežnih problemih). Področje časovnega planiranja se potencialno lahko poveže s tematiko v doktoratu.

Pri pregledu literature opažam, da je raziskovanje v tej smeri nekoliko bolj prisotno na področju pakiranja[23] kot razreza. Časovno planiranje je pomembno pri odnosu dobavitelj –

[20] Angl. *Financial Engineering* ali *Computational Finance*.
[21] To se lahko izvede s terminsko pogodbo (angl. »*futures*«) ali z operacijo, ki se imenuje »*forward*«, nasprotje je »*spot*« (nakup po trenutni ceni).
[22] Angl. *Scheduling* (Pinedo, 2012, str. 1-6).

stranka. Dobavitelj skrbi za izpolnitev naročil, ki jih optimalno pakira in jih dobavlja skupaj[24], kjer nadalje skupna teža ne sme presegati predpisanih omejitev, hkrati pa je dobavitelj zavezan storitev opraviti v roku. Rok dosega tako, da določene pakete dobavi hitreje in druge kasneje (Chen & Pundoor, 2009). Največ raziskovalnih dosežkov s tega področja je bilo narejenih na področju managementa oskrbovalne verige, ki sledi v nadaljevanju.

2.3 Management oskrbovalne verige

Management oskrbovalne verige[25] je naslednje izmed pomembnejših področij operacijskih raziskav. *SCM* je proces planiranja in realizacije vseh aktivnosti v dobavni verigi na najbolj učinkovit način (Harland, 1999, str. 1-30). V tem sklopu so na kratko opisana tri podpodročja: transport, zaloge in lokacija & razporeditev.

Aktivnosti v podjetjih, ki so povezane z razrezom materiala, vsebujejo marsikatere elemente managementa oskrbovalne verige. Ne glede na to da gre pri *SCM* za veliko širše raziskovalno področje od razreza, pa se lahko zgornjo definicijo za *SCM* brez problema spremeni tako, da v grobem opisuje splošno in poenostavljeno aktivnost razreza v podjetjih:

- Aktivnost razreza je rezultat planiranja in realizacije vseh aktivnosti v dobavni verigi na najbolj učinkovit način.

Slednja definicija je bolj podrobno predstavljena v nadaljevanju. Trenutno služi le za namene analogije s *SCM*, ki jo prikazujem s sliko 5.

Kadar razrez umeščamo v širšo sliko *SCM* podjetja, celotno aktivnost najlažje razdelimo v naslednje tri faze:

1. Od surovine do proizvoda

   Vključeni so dobavitelji surovin, dobavitelji vmesnih in končnih proizvodov. Pri razrezu se postopek začne s pripravo potrebnih surovin za ulivanje jekla[26]. Naslednja stopnja je izdelava profilov iz konstrukcijskega jekla, ki se nato najprej predela v palice različnih (standardnih) dolžin. Ta postopek navadno ne poteka med

[23] Področja pakiranja in razreza sta si matematično zelo podobna (matematično inverzna, ker z vidika osnovne matematične formulacije optimizacija pakiranja poteka v obratni smeri; zaloga se pri razrezu deli, pri pakiranju pa sestavlja).
[24] Angl. *batch packing* (gl. Chen & Pundoor, 2009).
[25] Angl. *Supply chain management*. Termin je skoval Keith Oliver v intervjuju za Financial Times 4. junija 1982 (Heckmann *et al.*, 2003). Uveljavljena kratica je: *SCM*.
Nem. *Lieferkettenmanagement* (gl. Walter, 2009, str. 101; Laudon *et al.*, 2010, str. 514) ali *Wertschöpfungslehre* (izraz bolj v uporabi pred uveljavitvijo termina *Lieferkettenmangement*) (gl. Möller, 2006, str. 78).
Špan. *Administración de la cadena de suministro* (Ballou, 2004, naslovna stran).
Port. (v uporabi v Braziliji): *Gerenciamento da cadeia de suprimentos* (Arenales, 2012b).
[26] Primer je bil že predhodno omenjen v opisu raziskovanj *Random walk* sistemov.

različnimi dobavitelji, temveč med različnimi proizvodnimi enotami istega podjetja.

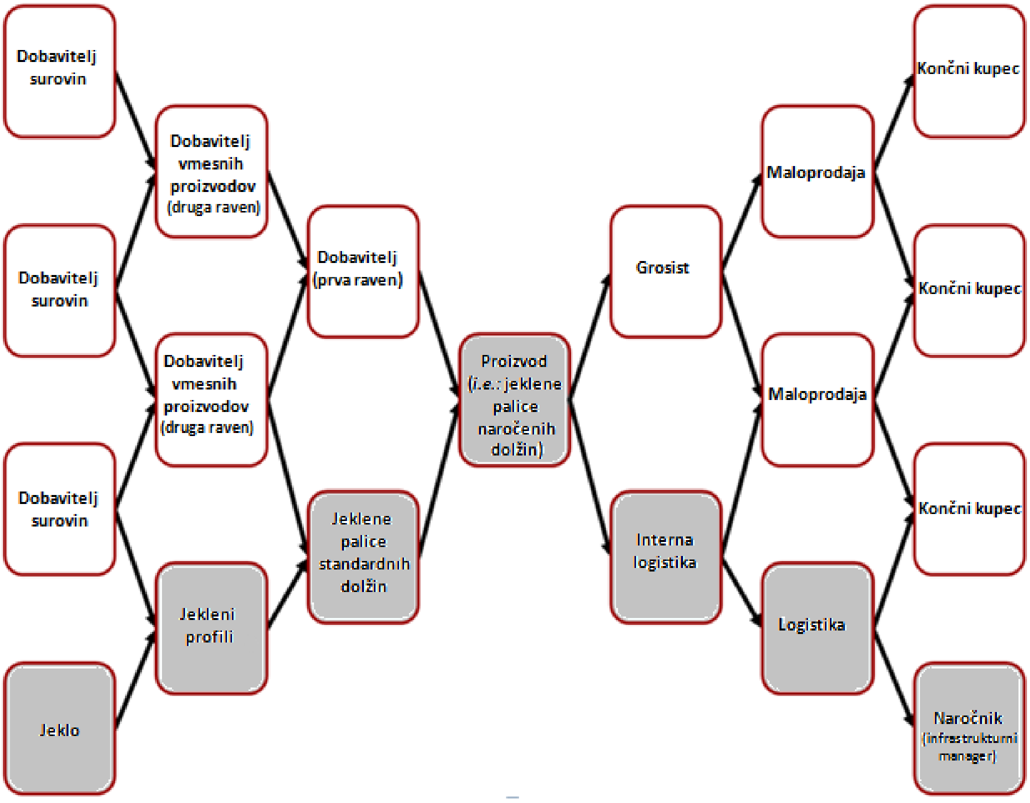
2. Proizvod

   Proizvod je pridobljen z razrezom standardnih dolžin palic na ustrezno število in na dolžine naročenih palic, ki tvorijo naročilo.

3. Od proizvoda do kupca (naročnika)

   Naročene kose materiala ustreznih dolžin je potrebno premestiti v sklopu interne logistike od rezalnega stroja na ustrezna mesta in pripraviti za odvoz (logistika) do naročnika.

Slika 5: Prikaz aktivnosti razreza v sklopu managementa oskrbovalne verige



Vir: Slika je prevedena in v osnovi temelji na delu Wieland & Wallenburg, 2011, ki pa je dopolnjen s primerom razreza, ki temelji na podlagi pogovorov in ogledov proizvodnega procesa v železarni Štore Steel d. o. o. (Marolt, 2011), železarni na Jesenicah Acroni, d. o. o. (Polanc, 2012) in železarni Metal Ravne d. o. o. (Gradišnik, 2012).

Opisane stopnje prikazujem tudi s sliko. To sem ustrezno prilagodil, tako da slika zajema posamezne aktivnosti povezane z razrezom. Te aktivnosti so poudarjene s sivo barvo.

Omeniti je potrebno, da je število deležnikov v oskrbovalni verigi lahko večje ali manjše, kot je prikazano na sliki. Tako se tudi proizvod (v primeru razreza so to naročeni kosi palic) na strani naročnika še nadalje obravnava v kombinaciji z drugimi materiali za izgradnjo konstrukcij.

Naslednja področja so še:

- Transport

Slovar slovenskega knjižnega jezika ponuja naslednjo definicijo (SSKJ, 2000, str. 1415):

  - Transpórt -a m (ọ̑) **1.** *prevoz, navadno česa večjega, težjega ...* / letalski, pomorski, železniški transport ...

Relativno kratka definicija kaže, kako širok pomen in kakšno aplikativno moč ima lahko izraz. V okviru operacijskih raziskav je lahko to področje povezano s katerim od ostalih področij. Slednje je razvidno tudi pri pregledu literature. Transport v literaturi največkrat vsebinsko nastopa pri managementu oskrbovalne verige (gl. poglavje: Management oskrbovalne verige). Kadar se analizira stohastično naravo procesa, se pogosto uporablja enega od verjetnostnih modelov. Primeri obsegajo čakalne vrste v prometu (Rijurekha Sen et al., 2012), raziskuje se kaotičen cestni promet v Indiji, ali že omenjeno Brownovo gibanje pri internetnem prometu (Norros, 1995). V povezavi s proizvodnjo se študira tako interna kot zunanja logistika (Koch, 2012). Pri optimizacijah se med drugim lahko išče optimalno uporabo vozil, razporeditev tovora (optimalno pakiranje v zaboje) in minimalni čas prevozov (Baskan *et al.*, 2012).

- Zaloge

Slovar slovenskega knjižnega jezika ponuja naslednjo definicijo (SSKJ, 2000, str. 310):

  - Zalóga-e ž (ọ̑) ... 2. količina, množina določene vrste blaga, materiala v skladišču, prodajalni, namenjena, pripravljena za prodajo, proizvodnjo: prodati celotno zalogo; trgovina ima veliko zalogo; zaloge materiala, proizvodov v skladišču; popis zaloge / obnoviti zalogo nadomestiti porabljeno, prodano z novim ...

To področje se večinoma povezuje z managementom oskrbovalne verige. Pomembno je tudi pri razrezu, kjer material oz. predmeti na zalogi, *i.e.* palice standardnih dolžin, nastopajo kot vhodni material ali input, iz katerega se izpolnjuje naročila (output).

- Lokacija in razporeditev

Reševanje problema postavitve objektov ali iskanje čim učinkovitejše fizične organizacije proizvodnega sistema je zelo raziskovan problem, ki se dotika tudi področij proizvodnih sistemov in kombinatorične optimizacije. Problem se je intenzivno raziskoval že pred pol stoletja (Wilson, 1964) in se sedaj pojavlja v različnih proizvodnih enotah in panogah, vključno s storitvami in komunikacijskimi nastavitvami, čeprav je poudarek praviloma na konkretnih proizvodnih sistemih (Meller & Gau, 1996). Problem vključuje tudi premične objekte, kot so različni roboti in računalniško vodena vozila (Kusiak & Heragu, 1987).

Področje je povezano s problemom pakiranja in razreza. Primeri so različni, npr. računalniško vodena vozila, na katerih mora biti prostor za tovor optimalno izkoriščen (Iori *et al.*, 2007 ali Zachariadis *et al.*, 2012). Za to področje se uporabljajo tudi optimizacijske metode in algoritmi, ki so značilni za področja razreza, med katerimi so:

- *Branch-and-cut* algoritmi (metode iz kombinatorične optimizacije, ki so sorodne *branch-and-bound* metodam) (Jepsen *et al.*, 2012).
    - Primer uporabe pri problemih razreza: (Barnhart *et al.*, 1998).
- *Branch-and-cut-and-price* algoritmi (Archetti *et al.*, 2011).
    - Primer uporabe pri problemih razreza; metoda za iskanje eksaktnih rešitev: (Alves & Carvalho, 2008).
- Algoritmi razveji in omeji (Vilfan, 2011) oz. *branch-and-bound* algoritmi (Zhang *et al.*, 2012).
    - Algoritmi so pogost način reševanja problemov razreza. Primer: (Scheithauer & Terno, 1995).

3 PODROČJE OPTIMIZACIJ

Področje optimizacij obsega algoritme, zvezno (oz. stalno) in diskretno optimizacijo ter kombinacijo obeh. Pri tem velja dodati opombo, da se podpodročje algoritmov prekriva tako z zvezno in diskretno optimizacijo kot tudi z ostalimi, predhodno opisanimi, področji. Ne glede na to dejstvo algoritme zaradi želje po večji preglednosti predstavljam ločeno. Opis zajema naslednje sklope:

- Algoritmi,
- Zvezna optimizacija,
- Diskretna optimizacija,
- Kombinacija zvezne in diskretne optimizacije.

3.1 Algoritmi

Algoritem predstavlja metodo reševanja enodimenzionalnega razreza po skupinah, zato nekatere pomembne pojme opisujem že v tem sklopu.

Algoritemski problem je običajno definiran kot (Wegener, 2005):

- nabor vseh možnih vhodnih podatkov (inputov), ki jih je možno vnesti (vhodni niz in nabor simbolov sta omejena oz. nista neskončna), in

- opis, ki za vsakega od možnih inputov ponuja množico možnih in končnih odgovorov ali rezultatov. Množica ne sme biti prazna.

Algoritmi se med drugim med seboj razlikujejo po:

- programskem jeziku, v katerem so napisani,
- po namenu (vsebini) in
- po težavnosti problema, ki ga rešujejo.

Osredotočam se na opis algoritmov po težavnosti za optimizacijske probleme. Pri težavnosti se osredotočam na probleme, ki so v množicah *P* in *NP*.

Pri tem razlagam nekatere pojme oz. relacije med njimi, ki predstavljajo tudi jedro zanimanja današnje teoretične računalniške znanosti in matematične teorije kompleksnosti (Granville, 2004; Fortnow, 2009).

Slika 6: Umeščenost področja

Vir: lastna skica.

Teoretično računalništvo je izraz, ki se običajno uporablja v informatiki. Izraz teorija kompleksnosti se načeloma uporablja v matematičnih krogih. Teorija kompleksnosti je eden izmed delov skupnega področja matematike in informatike (gl. sliko 6).

Teoretično merilo za uspešnost algoritmov se meri s t. i. »*Big O*«, matematično notacijo oz. notacijo za asimptotično rast funkcij. Pri vhodnih podatkih velikostnega reda *n* omenjena notacija poda količino časa in prostora primerjalno glede na *n*, ki je potrebna za izračun rešitev (Dictionary of Algorithms and Data Structures, 2013).

Pri ocenjevanju porabe časa se uporablja matematična notacija za asimptotično rast funkcij. Cilj je dano funkcijo *f(n)* omejiti navzgor[27] s funkcijo *g(n)*, pri čemer je *n* celoštevilski vhodni argument (input). Matematična oblika te trditve je naslednja (Vilfan, 2011):

$$\exists c, n_0 > 0, \forall n \geq n_0 \left[f_{(n)} \leq c \cdot g_{(n)} \right]$$

[27] Besedo navzgor se lahko glede na vsebino zamenja tudi z besedami navzdol ali narediti enako.

Množico funkcij *f(n)*, ki zadoščajo zapisanemu matematičnemu pogoju, se označuje z »O«.

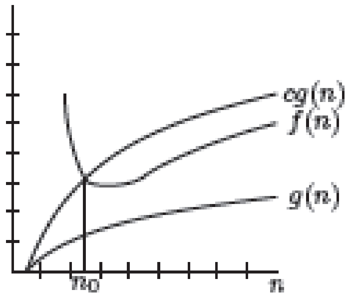
$$O(g_{(n)}) = \{f_{(n)} | \exists c, n_0 > 0, \forall n \geq n_0 [f_{(n)} \leq c \cdot g_{(n)}]\}$$

Iz česar sledi, da je $f_{(n)} \in O(g_{(n)})$.

Pri temu zapisu se je uveljavila nedoslednost in namesto $f_{(n)} \in O(g_{(n)})$ se dejansko uporablja $f_{(n)} = O(g_{(n)})$, kar je v strogo matematičnem smislu nekorekten zapis (bo pa v uporabi v tej nalogi).

Matematično opredelitev (Vilfan, 2011) ponazarja naslednja slika 7:

Slika 7: Asimptotična zgornja meja



Vir: Vilfan, 2011

Pri številnih množicah problemov, ki se jih rešuje z algoritmi, razlago v nadaljevanju osredotočam na naslednje pojme oz. probleme:

- Problemi tipa *P*

Teorija kompleksnosti razvršča probleme glede na težavnost reševanja. Problem je uvrščen v množico problemov razreda *P*, če je število korakov, ki so potrebni za njegovo rešitev, omejeno z določeno potenco aplicirano na velikost problema (Skiena, 1990).

P je oznaka za polinomski čas (angl. *Polynomial time*). V matematičnih notacijah predstavlja množico rešitev. Rešitve tipa *P* so določljive (angl. *decidable*[28]) na podlagi algoritma – v pomenu Turingovega stroja – v omejenem polinomskem času (Fortnow, 2009; O'Regan, 2013).

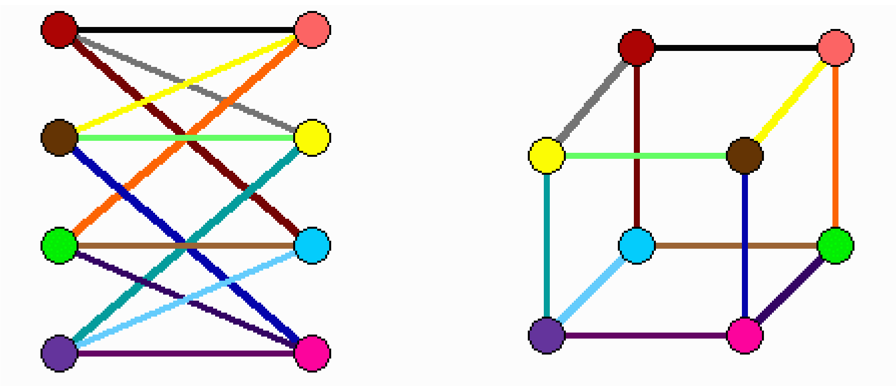
[28] Se nanaša na probleme, za katere so možni algoritmi, ki lahko za vmesne korake in teoretično v neomejenem času podajo output v obliki ali 0 ali 1 (t. i. Boolov rezultat) (Fortnow, 2009; O'Regan, 2013).

Problemi tipa *P* so avtomatsko tudi v množici *NP* ($P \subseteq NP$) (Skiena, 1990; Smale, 1998). Obstajajo tudi izjeme. Ni poznan oz. ne obstaja noben poznan algoritem tipa *P* za testiranje izomorfičnosti grafov. Za problem se je tudi dokazalo, da ni *NP*-poln, kar ga uvršča v območje med množico *P* in *NP*-polnih problemov; seveda v primeru, da taka množica sploh obstaja. Zato se ti problemi uvrščajo v posebni razred grafično-izomorfično polnih problemov (Skiena, 1990).

Pri nekaterih ostalih množicah problemov relacija z množicami *P* in *NP* ni dokazana, temveč se mnoge njihove medsebojne povezave le predpostavljajo. Take množice so *P-SPACE*, *EX-PTIME* in *EX-PSPACE*, ki jih povzemam v nadaljevanju.

Slika 8 prikazuje primer dveh izomorfnih grafov. Pri obeh so relacije med »oglišči« enake (na sliki je to prikazano z različnimi barvami).

Slika 8: Izomorfizem grafov



Vir: Winter, 2013.

Izračun praštevil je tipičen in najbolj poznan problem tipa *P* (Agrawal *et al.*, 2004; Aho, 2011).

Za doktorsko nalogo so pomembni zlasti naslednji tipi problemov: »Imamo večjo skupino študentov, ki jih moramo razdeliti v pare, ki bodo delali na različnih nalogah. Za študente vemo, kdo je s kom kompatibilen in pri katerih nalogah. Želimo jih združiti tako, da bo rezultat čim boljši. Če bi želeli štiridesetim študentom poiskati optimalni par, bi imeli na voljo več kot 300 tisoč trilijonov ($300 \cdot 10^{21}$) možnih parov (Fortnow, 2009).« Pri razrezu po skupinah tudi iščemo pare, ki se po dolžini najbolje skladajo z dimenzijami materiala na zalogi.

Število parov narašča z aritmetično vsoto po enačbi $n(n-1)/2$. Število parov narašča polinomsko glede na n (asimptotična funkcija je $2n^2$). Za vse pare je potrebno najti optimalno skladanje z dimenzijami materiala na zalogi, s palicami različnih dolžin, od katerih se pare odreže. Možnih kombinacij je eksponentno glede na *n*. Slednje problem premakne iz *P* v *NP*.

Iskanje optimalnih parov oz. postopki uparjevanja so eden izmed tipičnih problemov s področja optimizacij. Leta 1965 je Edmonds predstavil učinkovit algoritem za reševanje problema uparjevanja (angl. *Matching problem*) (Edmonds, 1965). Edmonds je hkrati ponudil formalno definicijo za učinkovito iskanje rešitev. Iskanje rešitev poteka v fiksiranem polinomskem času glede na obseg vhodnih podatkov. Množica rešitev pri takih problemih je kasneje postala znana pod oznako *P* (po polinomskem času) (Edmonds, 1965; Fortnow, 2009).

- Problemi tipa *NP*

NP je oznaka za nedeterminističen polinomski čas (angl. *nondeterministic polynomial-time*[29]). V matematičnih notacijah predstavlja množico rešitev. Rešitve tipa *NP* so določljive s pomočjo nedeterminističnega algoritma (ali nedeterminističnega Turingovega stroja[30]) v omejenem polinomskem času. Nedeterminističen algoritem ali Turingov stroj je teoretični koncept, ki predpostavlja, da se procesorska moč algoritma v odločitvenem drevesu ohranja. Slednje pomeni, da število generacij določenega reda v odločitvenem drevesu ne vpliva na čas pri iskanju rešitve[31] (NTM torej deluje enako hitro/neodvisno/paralelno za vse odločitvene poti hkrati). Pri tem moram dodati opombo, da za opisano ni poznan tehnološki oz. strojni ekvivalent, niti ni teoretične oz. konceptualno-idejne zasnove, ki bi bila zmožna izvesti opisano računanje (vključno s kvantnimi računalniki, ki se v tem kontekstu zmotno zamenjujejo s teoretično predpostavko NTM) (Fortnow, 2009; Homer & Selman, 2011; O'Regan, 2013).

Rešitve *NP*-problemov je možno preveriti v polinomskem času (Karp, 1972).

Tipičen problem, ki se nahaja v množici *NP,* je problem delne vsote[32] (poseben primer problema nahrbtnika) (Garey, 1979). Pri dani množici števil je potrebno ugotoviti, ali obstaja neprazna podmnožica, v kateri je vsota števil čim bližje določeni meji; za lažjo ponazoritev naj bo ta meja nič. Komplementarni primer je, ko je cilj poiskati podmnožico, ki po vsoti ne vrne seštevka nič. Tak problem spada v komplementarno množico *NP* oz. co-*NP*[33] (Agrawal *et al*., 2004; Bokhari, 2012).

Če je določen problem uvrščen v množico *NP*, potem velja, da je tudi njegov komplement po težavnosti enakovreden *NP*, le da se uvršča v *co-NP*. Enako velja za *NP*-polne oz. NP-težke probleme.

[29] Kratica se v istem kontekstu uporablja za nederminirane algoritme (angl. *non-deterministic*) ali t. i. »Turingove stroje«. Pogosto se v tem kontekstu uporablja kratica *NTM* (angl. Nondeterministic Turing Machines) (Homer & Selman, 2011).
[30] Turingov stroj je teoretični koncept za računalnik ali abstraktni računalnik in se imenuje po Alanu Turingu, ki ga je predstavil leta 1937 (Turing, 1938). Za več osnovnih informacij priporočam knjigo (Wolfram, 2002), zlasti str. 78-81 in 888.
[31] Pojmi »odločitveno drevo« in »generacija« so prikazani pri sliki 3 (vendar v drugačnem kontekstu).
[32] Angl. *subset sum problem*.
[33] Dokaza za *NP* = *co-NP* (ali dokaza za alternativo) matematična srenja še ni podala (Hopcroft, 2000).

Z vidika razreza je tak primer idealnih vzorcev. Idealni vzorci so opredeljeni kot kombinacija naročenih kosov poljubnih dolžin, ki se proizvedejo iz določene palice, tako da je neuporabni ostanek najmanjši. Komplementarni problem so vsi ostali vzorci, ki niso idealni, kar v tem kontekstu pomeni, da se proizvedejo iz določene palice na neoptimalen način (ostanek ni nikoli optimalen).

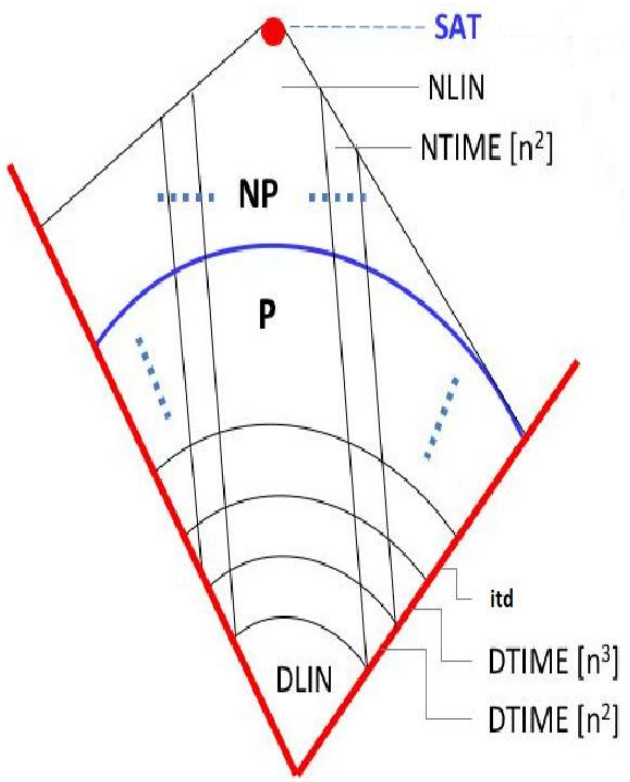
Težavnost problemov znotraj množic *P* in *NP* se stopnjuje na način, ki ga prikazuje slika 9 na desni.

Težavnost meri s časom in prostorom, ki je potreben za rešitev problema (Faramawi & Regan, 2008).

Najnižje so uvrščeni problemi tipa *DLIN*[34], pri katerih je prostor omejen z asimptotično funkcijo *O(log·n)* (Babu *et al.*, 2010) ali čas z *O(n/logn)* (Grandjean, 1996).

Najvišje v tej sliki so uvrščeni problemi *SAT* (gl. rdečo piko na sliki desno), ki po težavnosti dosegajo raven *NP*-polnih problemov, ki so opisani v nadaljevanju (Grandjean, 1996)[35].

Slika 9: Deterministične in nedeterministične časovne hierarhije problemov znotraj množice *NP*



Vir: Faramawi & Regan, 2008.

Probleme znotraj posameznih množic lahko dalje delimo glede na kompleksnost reševanja. Pri množici *NP* se problemi po težavnosti dalje delijo po naslednjem ključu[36]:

- *NP*-lahki problemi so po težavnosti primerljivi ali vsaj tako težavni kot *NP*, kar pa nujno ne pomeni, da se v to množico tudi uvrščajo. So funkcijski problemi, pri katerih je cilj izračunati output glede na vnaprej dan input. Pri ostalih *NP*

[34] Angl. *Deterministic linear languages* (prevod: deterministični linearni jezik).
[35] Primer *SAT*.
[36] Isto velja pri ostalih množicah problemov.

problemih, ki so odločitveni problemi, pa je cilj izračun Boolovega[37] rezultata glede na input.

- *NP*-polni problemi so najtežji problemi v množici *NP* in so vsaj tako težki kot *NP*-polni. Vsak NP-problem je možno pretvoriti v *NP*-težek problem in vsak algoritem, ki rešuje kateregakoli od *NP*-težkih problemov, se lahko pretvori v obliko, ki lahko rešuje katerikoli *NP* problem (Wegener, 2005).

Relacije med množicami problemov

Eden glavnih izzivov današnje matematične znanosti je dokaz za relacijo med množicama *P* in *NP*. Dokaz za slednje predstavlja sveti gral tudi za teoretično računalništvo. Možnosti sta dve:

- $P \neq NP$ in
- $P = NP$.

Večina znanstvene sfere predpostavlja, da velja relacija $P \neq NP$ (Lipton, 2010). Lipton (2010) na str. 20 to podkrepi z zanimivo anekdoto: Nobelovega nagrajenca za fiziko nekoč na eni izmed znanstvenih konferenc med drugim v šali povprašajo, na katero vprašanje bi želel imeti odgovor, vendar le v velikosti enega bita. Odgovori jim, da bi želel vedeti, ali drži $P \neq NP$. Takrat pa mnogi od poslušalcev vzkliknejo, da je to že splošno znano in sprejeto ter da edino, kar še potrebujejo, je dokaz.

V primeru, če velja $P = NP$, bi to med drugim pomenilo, da:

- Obstaja univerzalna metoda, za vse *NP*-polne probleme, ki bi bili vsi v *P*. Protiargument navaja, da si je slednje težko predstavljati, saj je k reševanju *NP* problemov pristopilo veliko ljudi različnih profilov, pri čemer v vsem tem času še ni bila predlagana nobena metoda, ki bi probleme eksaktno reševala v polinomskem času.

- Moderne kriptografije bi bilo konec (med njenimi predpostavkami je tudi $P \neq NP$) (Wegener, 2005; Lipton, 2010).

Problemi množic *P* in *NP* so del širšega sklopa, ki ima naslednjo hierarhijo težavnosti[38]:

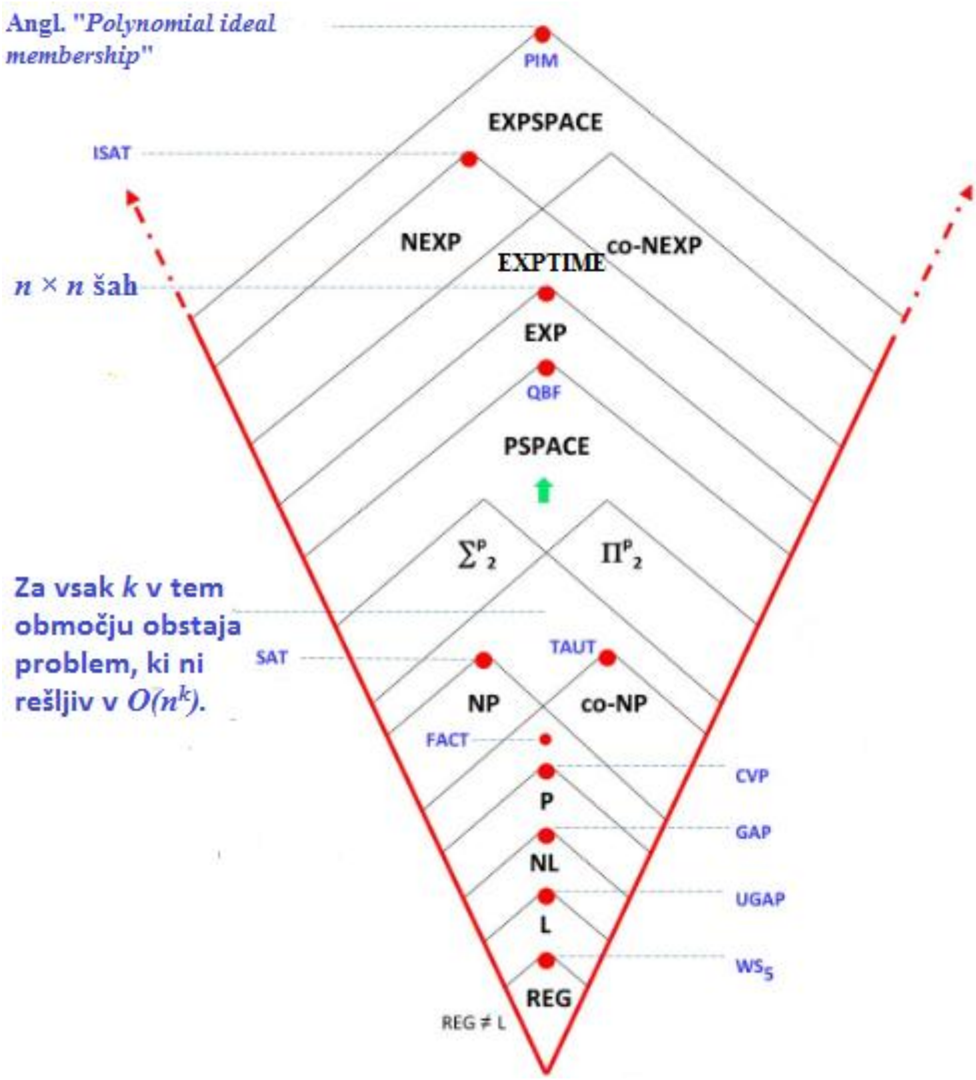
$NL \subseteq \boldsymbol{P} \subseteq \boldsymbol{NP} \subseteq PH \subseteq P\text{-}SPACE \subseteq EXPTIME \subseteq EXPSPACE$, pri čemer velja (Book, 1988; Papadimitriou, 1994; Hopcroft, 2000):

- $P \subsetneq EXPTIME$,
- $NP \subsetneq NEXPTIME$ in
- $P\text{-}SPACE \subsetneq EXPSPACE$.

[37] Boolov rezultat je lahko le »*true*« ali »*false*« oz. da ali ne. Po angleškem matematiku George Boolu (1815-1964) (Stanford Encyclopedia of Philosophy, 2013).
[38] Množice je mogoče še nadalje deliti (za podrobnejše opise gl. Wegener, 2005).

Probleme »Space« (npr. *P-SPACE*, *NP-SPACE*, *EXPSPACE*, *N-EXPSPACE*) opisuje teorem prostorske hierarhije, probleme »Time« (npr. *EXPTIME*, *N-EXPTIME*) pa teorem časovne hierarhije.

Slika 10: Hierarhija problemov glede na njihovo težavnost



Vir: prirejeno po Faramawi & Regan, 2008.

Pri *EXPTIME* je čas izračuna rešitve pri *n* vhodnih elementih omejen z eksponentno funkcijo $O(n^k)$; *k = spremenljivka* (Aho, 2011).

Pri *EXPSPACE* je še računski prostor navzgor omejen z eksponentno funkcijo. Število računskih korakov glede na input je eksponentno (Hopcroft, 2000).

Glavne množice problemov so predstavljene še slikovno, pri tem je razvidna njihova hierarhija glede na težavnost.

Slika 10 uvršča probleme tipa *L* in *NL* najnižje. Gre za deterministično in nedeterministično varianto problemov s kompleksnostjo prostora *O(log n)*.[39] Nato po težavnosti sledijo problemi *P* in *NP*. Pri *EXPTIME* je dopisan primer $n \times n$ šah. To je primer šahovnice v velikosti $n \times n$, kamor je potrebno uvrstiti *n* kraljic, ki se medsebojno ne ogrožajo. Čas računanja je eksponenten glede na input. Najbolj kompleksni problemi se uvrščajo v množico *EXSPACE*. Reprezentativen problem je *PIM* (Mayr, 1996).

3.2 Zvezna optimizacija

Področje zveznih optimizacij[40] predstavljajo študije problemov, pri katerih se želi optimizirati (tako minimizirati kot maksimizirati) zvezno funkcijo z več spremenljivkami, ki so načeloma omejene. Začetki področja segajo v 17. stoletje n. št. v čas Newtona in Leibniza (Jeyakumar & Rubinov, 2005).

Današnje metode niso uporabne brez računalniške podpore, kar se je začelo z delom Dantziga leta 1947. Tisto obdobje predstavlja začetek dela s simplex metodo v sklopu reševanja problemov z linearnim programiranjem (Jeyakumar & Rubinov, 2005).

Simplex metoda ali algoritem je eno najpomembnejših del s področja optimizacij v 20. stoletju. Algoritem je razvil ameriški matematik George Bernard Dantzig (1914-2005[41]) (gl. Wagner, 1959; Dantzig & Thapa, 1997; Wagner, 1959 in Dantzig & Thapa, 2003). Algoritem je nato *post festum* poimenoval Theodore Motzkin (1908-1970) (gl. Murty, 1983).

Simplex algoritem išče rešitev po korakih. V vsakem koraku se približa optimalni rešitvi, kar je glavni cilj teh korakov. Metoda je pomembna tudi pri razrezu[42], zato princip njenega delovanja pojasnjujem z algoritmom 1 in ilustrativno v sliki 11.

Predstavitev simpleks algoritma vsebuje vhodne in izhodne podatke ter postopek iskanja optimalne rešitve.

[39] Čas računanja rešitve za *L* posledično ne more presegati $2^{O(\log n)}$ (problemi so v grobem enakovredni predhodno opisanim primerom *DLIN*).

[40] Angl. *Continuous optimization* (gl.: Eiselt *et al.*, 1987 ali Andréasson *et al.*, 2007).

[41] V osmrtnici v Washington Postu je bilo med drugim zapisana tudi slednja anekdota: Dantzig je rešil dva, do tedaj nerešena, statistična problema, ki jih je pomotoma zamenjal za domačo nalogo, ko je pozno prišel na predavanja (Holley, 2005).

[42] Simplex metoda je bila izhodišče za reševanje problemov razreza (Gilmore & Gomory, 1965a) in (Dyckhoff, 1981).

Algoritem 1: Postopek iskanja rezultata pri simpleks metodi oz. algoritmu

Vhodni podatki:
$m \times n$ matrika A, vektor omejitev b dolžine m in linearna kriterijska funkcija $f = c \cdot x + \delta$.

Izhodni podatki:
vrednosti spremenljivk x_i, pri $1 \leq i \leq n$, kjer f doseže maksimum (zapiše se še parametre, ki predstavljajo velikost tega maksimuma).

Postopek:

1. Izhodiščna simpleksna tabela z elementi A se zapiše v vrstice $1 \ldots m$ in stolpce $1 \ldots n$. V vrstico $m + 1$ spadajo komponente c, v stolpec $n + 1$ pa komponente b. V element $\langle m+1, n+1 \rangle$ se zapiše še vrednost - δ. Stolpce se poimenuje $x_1, x_2, \ldots, x_n b,$ vrstice pa $y_1,\ y_2, \ldots, y_n, -f$.

2. Izbere se katerikoli stolpec x_J, ki mu ustreza pozitivna komponenta $c_{J,}$ in nadaljuje se s postopkom. Če takega stolpca ni, se ne nadaljuje, ker je globalni maksimum f že najden in je možno vrednosti neničelnih spremenljivk odčitati iz stolpca $n + 1$, negativno vrednost funkcije f pa iz elementa $\langle m+1, n+1 \rangle$.

3. Izbere se tisto vrstico y_I, ki ima pozitiven a_{IJ} in mu ustreza najmanjša vrednost $\frac{b_I}{a_{IJ}}$. Če so vrednosti a_{IJ} negativne, to pomeni, da f nima končne maksimalne vrednosti in se ne nadaljuje.

4. Vrstico y_I se ponovno definira na način, da se vse elemente, razen a_{IJ}, deli z a_{IJ} , element a_{IJ} pa se zamenja z $\frac{1}{a_{IJ}}$.

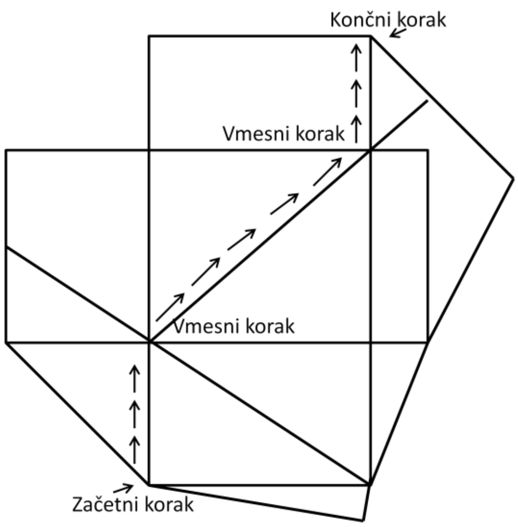
5. Ostale vrstice y_i se zamenja tako, da se od vseh elementov a_{ij}, razen a_{iJ}, odšteje $\frac{a_{Ij} a_{iJ}}{a_{IJ}}$ ter a_{iJ} nadomesti z $-\frac{a_{iJ}}{a_{IJ}}$.

6. Stolpec x_J se preimenuje v y_I, vrstico y_I pa v x_J in se vrne na korak 2.

Vir: Vilfan, 2011

Ilustrativen prikaz in osnovno logiko delovanja simpleks metode pa prikazuje naslednja slika.

Slika 11: Ilustriran princip delovanja simplex algoritma



Vir: Lastna skica na podlagi naslednjih virov (Murty, 1983, Dantzig & Thapa, 1997, Jeyakumar & Rubinov, 2005).

Optimizacija predstavlja pot od začetka (začetni korak) do rešitve (končni korak). Postopek reševanja: vsak vmesni korak (naj) vodi do oglišča, ki predstavlja najbližjo pot do končnega oglišča. V vsakem oglišču je tako omejen izbor poti do naslednjih oglišč. Seštevek izbir simplex metode je zato v primerjavi z vsemi možnimi izbirami bistveno manjši.

Področje zvezne optimizacije se je od 40-ih let prejšnjega stoletja razširilo na več področij in se med drugim uporablja pri sintezi naslednje generacije zdravil, *e.g.* biozdravil (gl. Bolshan *et al.*, 2013), v proizvodnji avtomobilskih motorjev (Syberfeldt & Lidberg, 2012[43]) in v managementu naložbenih portfeljev (Muñoz *et al.*, 2013).

3.3 Diskretna optimizacija

Diskretno optimizacijo[44] sestavlja več področij. Področje se najprej deli na (delitev med drugim nastopa v reviji *Discrete Optimization*, ki je imela leta 2013 petletno povprečje faktorja vpliva 0,70, in v razdelitvi sekcij v sklopu EURO konferenc[45]):

- linearno programiranje s celimi števili (angl. *Integer linear programming*, kratica ILP),
- kombinatorično optimizacijo.

[43] Raziskava zadeva motorje avtomobilov znamke Volvo in njihovo proizvodnjo na Švedskem.

[44] Angl. *discrete optimization*. Nem. *Ganzzahlige Optimierung* (Schade, 2012). Rus. *дискрéтное программúрование [diskretno(j)e programmirovani(j)e]* (Korbutas & Finkelštejn, 1969) in *дискретная оптимизация [diskretnaja optimizacija]* (Medvedev, 2011).

[45] European Conference on Operational Research je največja konferenca s področja operacijskih raziskav, pri kateri so vedno tudi sekcije z razrezom. Opisana delitev področja diskretne optimizacije je razvidna v gradivih 23., 24. in 25. konference v Bonnu (Nemčija), Lizboni (Portugalska) in Vilni (Litva) (EURO 23, 2009; EURO 24, 2010 in EURO 25, 2012).

Pri pregledu literature se izkaže, da zgornja delitev sicer obstaja, vendar pa se večino znanstvenih del s področja diskretne optimizacije klasificira le približno. Metode v znanstvenih delih imajo v večini primerov karakteristike tako kombinatorične optimizacije kot linearnega programiranja s celimi števili. Zato se navadno dela uvršča med področji po merilu čim večje ustreznosti (Storer, 2002).

Linearno programiranje s celimi števili

Linearno programiranje s celimi števili (*ILP*) zajema optimizacijske postopke, kjer so spremenljivke cela števila. Beseda *programming* v sklopu kratice *ILP* je sopomenka za problem in neposredno ne pomeni programiranja v kakršnemkoli smislu programske rešitve. Pojem linearno programiranje se razume kot optimizacijski problem; *ILP* je torej optimizacijski problem, pri katerem lahko spremenljivke (x_i) zavzamejo le cela števila ($\mathbb{Z}$). Pri linearnem programiranju se spremenljivke vedejo kot vektorji in so razdeljene na več komponent (Kunegis, 2006):

$$x_0 = [\, x_{n1},\ x_{n2},\ \cdots,\ x_{nj}\,];\ x_n = \text{celo število.}$$

Pri tem običajno obstaja poljubno število ostalih omejitev, ki se v praksi razlikujejo od primera do primera.

Kriterijska funkcija, ki je predmet optimizacije (*i.e.* minimizacije ali maksimizacije), je lahko le rezultat določene linearne kombinacije (komponent) spremenljivk. Sledi primer matematične notacije za maksimizacijo kriterijske funkcije za primer *ILP*.

$$\max f(x), x \in A \subseteq \mathbb{Z}^n \text{, kjer so:}$$

f(x) → kriterijska funkcija,
A → množica omejitev,
$\mathbb{Z}^n$ → množica celih števil (vektorjev dimenzije *n*).

Pri navedeni notaciji sta f(x) in A odvisna od vrste problema, panoge, v kateri problem nastopa, in od konkretnega primera v praksi (Nemhauser & Wolsey, 1988; Kunegis, 2006).

Glede na notacijo vsak $x_i \in A$ predstavlja **izvedljivo** rešitev.

Optimalna rešitev x_{opt} je tista, za katero velja:

$$x_{opt} \in A, \qquad kjer\ velja\ za\ \forall\ x \in A, \qquad f(x) \leq f(x_{opt})$$

V kolikor za spremenljivko *x* ne velja pogoj, da mora biti celo število, se problem uvršča med zvezne linearne probleme in je rešljiv s simplex metodo, ki sem jo opisal v poglavju pri zvezni optimizaciji. Ko je dodan pogoj, da mora biti *x* celo število, se problem uvršča med diskretne probleme (in nadalje v podvrsto ILP). Tak problem je ob zgornji notaciji tudi *NP*-poln[46] (Nemhauser & Wolsey, 1988; Kunegis, 2006).

Problemi linearnega programiranja se uvrščajo v množico problemov P, kar je dokazal ruski matematik (Khačian, 1979).

ILP-problemi spadajo v množico *NP*-težkih[47] in/ali *NP*-polnih problemov. Leta 1972 je Karp za 21 problemov iz tega področja dokazal, da so *NP*-polni. Med temi problemi je tudi KNAPSACK oz problem nahrbtnika, ki je aktualen pri problemih razreza (Karp, 1972)[48].

Metode reševanja so računalniški algoritmi, kjer so spremenljivke in omejitve v naslednji obliki (Nemhauser & Wolsey, 1988; Kunegis, 2006):

$f(x) = c^{T}x,\ A = \{\ x \mid \boldsymbol{C}x = \boldsymbol{b},\ x \geq 0\}$

c → vektor (matrika tipa $n \times 1$).
C → matrika (tipa $m \times n$).
b → vektor (matrika $m \times 1$).

Asimptotična zgornja meja je naslednja:

$$f(n) = O(n^k), k = konst.$$

ali alternativa, ki je bolj matematično dosledna[49]:

$$f(n) \epsilon\ O(n^k), k = konst.$$

$O(n^k)$ je teoretična zgornja meja pri iskanju rešitve, kar pomeni, da se algoritem rešitev za $f(n)$ najde v času, ki je pod omejitvijo asimptotične funkcije. V konkretnem primeru je to v polinomskem času.

Kadar omejitev za cela števila pri nekaterih spremenljivkah ne velja (a ne pri vseh hkrati), se problem uvršča med MILP (angl. *mixed integer linear programming*) (*e.g.* Gomory, 1960; DiMaggio *et al.*, 2009; Sherali *et al.*, 2010).

3.4 Kombinatorična optimizacija

Glavni cilj kombinatorične optimizacije[50] je razvoj metod ali algoritmov, ki omogočajo eksaktno ali hevristično reševanje kombinatoričnih problemov. Kompleksnost nekaterih

[46] Slednje velja tudi za večino problemov razreza, ki se uvršča med ILP-probleme (Lodi *et al.*, 2002; Lodi *et al.*, 2002(a) in Lodi *et al.*, 2004).
[47] Gl. še (Garey & Johnson, 1979) za seznam *NP*-problemov.
[48] Ponovna objava dela leta 2010 ima v dveh letih že nad 7000 citatov (Google Scholar, 2013). Po Karpu so poimenovane tudi Karp redukcije, i.e. redukcije polinomskega časa N:1 (med drugim gl. Pagourtzis & Zachos, 2006).
[49] Enačaj se lahko razume kot rešitev, ki je vsaj tako dobra in ne nujno enaka.

problemov najbolje ponazarja sicer tipičen problem s tega področja: problem trgovskega potnika[51], ki mora obiskati npr. 20 mest. Možnih poti med vsemi mesti eksponentno narašča, pri čemer je permutacij za naveden primer 20 (2432902008176640000 ≈ 2,4 × 10^{18}), zaradi česar optimalne poti – torej najkrajše – danes za relativno enostavne primere ni možno izračunati prej kot v nekaj letih (Korte & Vygen, 2012).

Problematika, ki je nakazana s problemom trgovskega potnika, je skupna vsem primerom kombinatorične optimizacije. Značilno je veliko število možnosti, ki metodam za reševanje problemov – algoritmom – onemogočajo učinkovito primerjavo vseh možnosti, kar pogosto pomeni, da iskanje eksaktnih rešitev ni možno ali učinkovito z vidika organizacij, ki se s problemi ukvarjajo.

Hevristične metode ali algoritmi probleme kombinatorične optimizacije po težavnosti zmanjšajo iz *EXPTIME* (ta težavnost problema nastopa, ko se išče globalni optimum oz. eksaktno rešitev) v *NP*-polne (ko se išče hevristično rešitev, ki je blizu optimalni) (Scholl, 2001; Ruiz, 2012).

Pri reševanju *NP*-težkih problemov se uporablja različne hevristične metode (algoritme). Ti načeloma vrnejo rešitev, ki je blizu optimalni, zato se jih bolj podrobno imenuje kot približnostne algoritme. Med priložnostnimi algoritmi sta poleg *ILP*- algoritmov – v tem kontekstu poudarek na *branch and bound* algoritmih – pomembna še (Hochbaum, 1997):

- požrešni algoritem,
- algoritem za dinamično programiranje.

Požrešna metoda ali algoritem (angl. *greedy algorithm*) je pogost način reševanja problemov optimizacije. Metoda problem razdeli in rešuje po sklopih. Pri vsakem sklopu ali podproblemu algoritem izračuna delne rešitve in za nadaljevanje izbere tisto rešitev, ki v tistem trenutku izkazuje največji potencial (korist, dobiček, minimalni ostanek materiala itd). Pri razrezu je uporaba požrešnih algoritmov pogosta (Scheithauer & Terno, 1995).

---

[50] Angl. *combinatorial optimization* (dober opis tematike ponuja: Papadimitriou & Steiglitz, 1998). Nem. *Kombinatorische Optimierung* (Scholl, 2001). Špan. *optimización combinatoria* (Ruiz, 2012). Rus. *Комбинаторная оптимизация* (Barsegjan, 2009).

[51] Soroden je problem kitajskega poštarja, ki določenega kraja ne sme obiskati več kot enkrat.

Osnovna zgradba požrešnega algoritma je naslednja (gl. algoritem 2):

Algoritem 2: Požrešni algoritem

```
TYPE
  Element = . . .
VAR maxvr:INTEGER; s:SetOfElement;
  VAR a: ARRAY OF Element;
BEGIN
  (* U je množica elementov u1, u2, …, un *)
  (* Elemente u1, u2, …, un uredimo po nenaraščajoči
vrednosti in tako urejeno zaporedje priredimo tabeli a *)
maxvr:=0; s:= Ø
FOR x:=1 TO n DO
  IF dopustno (s ∪ {s|x|}) THEN
    s:= (s ∪ {a|x}); INC(maxvr,Vrednost {s|x|}))
    END
  END
  (* rezultat je množica s z vrednostjo maxvr *)
END
```

Vir. Vilfan, 2011.

Metode ali algoritmi za dinamično programiranje so ene bolj primernih metod za reševanje optimizacijskih problemov. Pri reševanju problem najprej razdelijo in kasneje rešujejo po kosih (podproblemih oz. podnalogah). Metoda je sorodna reševanju z rekurzivnim razcepom. Razlika je v tem, da so podnaloge pri rekurzivnem razcepu neodvisne, medtem ko so pri dinamičnem programiranju medsebojno odvisne. Ker so tu podnaloge med seboj odvisne, je pri reševanju potrebno hraniti vse vmesne rešitve, ker se lahko katerakoli podnaloga med reševanjem celotnega problema pojavi večkrat. Algoritmi, ki delujejo po tem principu, so med drugim uporabni pri reševanju problema nahrbtnika (Vilfan, 2011).

3.5 Kombinacija diskretne in zvezne optimizacije[52]

Kombinacija omenjenih optimizacij je prisotna na mnogih področjih (v grobem je literatura povzeta v tabeli 1).

Ključna značilnost področja je reševanje problemov v več stopnjah oz. podnalogah. Pri reševanju problema se pri podnalogah izmenično uporabljajo metode (algoritmi), ki pri nekaterih podnalogah spadajo pod zvezno, pri drugi pa pod diskretno optimizacijo. Možno je tudi vse podnaloge rešiti z zvezno optimizacijo, rešitve teh nalog pa kasneje uporabiti za vnosne podatke pri diskretni optimizaciji. Tak pristop se vedno bolj uveljavlja v zadnjem

[52] Področje ni istovetno in ne velja za dela, kjer so opisane skupne rešitve za diskretne in zvezne probleme (Suwansirikul *et al.*, 1987).

času in je značilen zlasti za področje ekonomije, pri reševanju konkretnih problemov iz prakse, oz. matematične ekonomije pri reševanju teoretičnih ekonomskih modelov.

V ekonomiji so najbolj znana in citirana dela s področja teorij iger v povezavi z Nash ravnovesji[53]. Tu se zvezna optimizacija praviloma izračunava po posameznih nagradah ali izkupičkih[54] za odločitve agentov znotraj Nash-ovih matrik. Kadar je problem obsežen se nato opravi LP-relaksacija[55] (gl. Sandholm *et al.*, 2005), ki matematično normalizira izračunane izkupičke. Izkupički se nato uporabijo kot vhodni podatki za diskretno optimizacijo, s katero se poišče optimalne strategije z vidika celotne matrike.

Iskanje Nash-ravnotežja (optimalne rešitve) se uvršča v množico *NP*-težkih problemov (Höfer, 2006).

Ostala dela se med drugim dotikajo področij inženirstva, strojništva in robotike v več različnih panogah.

Tabela 1: Literatura, raziskovalno področje, kjer se hkrati uporablja diskretne in zvezne optimizacijske postopke

Avtor(ji), leto	**Metode (ali naslov) prispevka, članka ali knjige**	**Področje**
Sandgren, 1990	*Branch & Bound using Sequential Quadratic programming*	Strojništvo
Fu *et al.*, 1991	*Integer-Discrete-Continuous Non-Linear Programming*	Strojništvo
Loh & Papalambros, 1991	*Sequential Linearization Algorithm*	Strojništvo
Zhang & Wang, 1993	*Simulated Annealing*	Strojništvo
Chen & Tsao, 1993	*Genetic Algorithm*	Strojništvo
Li & Chou, 1994	*Non-Linear Mixed-discrete Programming*	Strojništvo
Wu & Chow, 1995	*Meta-Genetic Algorithm*	Strojništvo
Lin *et al.*, 1995	*Modified Genetic Algorithm*	Strojništvo
Thierauf & Cai, 1997	*Two-level parallel Evolution Strategy*	Strojništvo
Cao & Wu, 1997	*Evolutionary Programming*	Strojništvo
Benaïm & Hirsch, 1999	*Mixed Equilibria and Dynamical Systems Arising from Fictitious Play in Perturbed Games*	Ekonomija
Lampinen & Zelinka, 1999	*Differential Evolution*	Strojništvo

Se nadaljuje na naslednji strani.

[53] Angl. *Nash equilibrioum* (gl. – članek, ki je bil kasneje podlaga za Nobelovo nagado iz ekonomije – Nash Jr., 1950).
[54] Angl. *pay-off(s)*.
[55] Angl. *linear programming relaxation*.

Nadaljevanje tabele 1 iz prejšnje strani.

Avtor(ji), leto	**Metode (ali naslov) prispevka, članka ali knjige**	**Področje**
Sandholm et al., 2005	*Mixed-Integer Programming Methods for Finding Nash Equilibria*.	Ekonomija
Liuzzi *et al.*, 2012	*Derivative-free methods for bound constrained mixed-integer optimization*	Strojništvo in ekonomija
Steven A. Gabriel *et al.*, 2012	*Solving Discretely-Constrained Nash–Cournot Games with an Application to Power Markets*	Elektrotehnika in ekonomija
Chang & Chang, 2013	*Installation for Power Systems*	Elektrotehnika

Opomba 1: našteti problemi niso linearni.
Opomba 2: vsa področja se zaradi uporabe algoritmov prepletajo z računalništvom.
Delni vir: Lampinen & Zelinka, 1999.

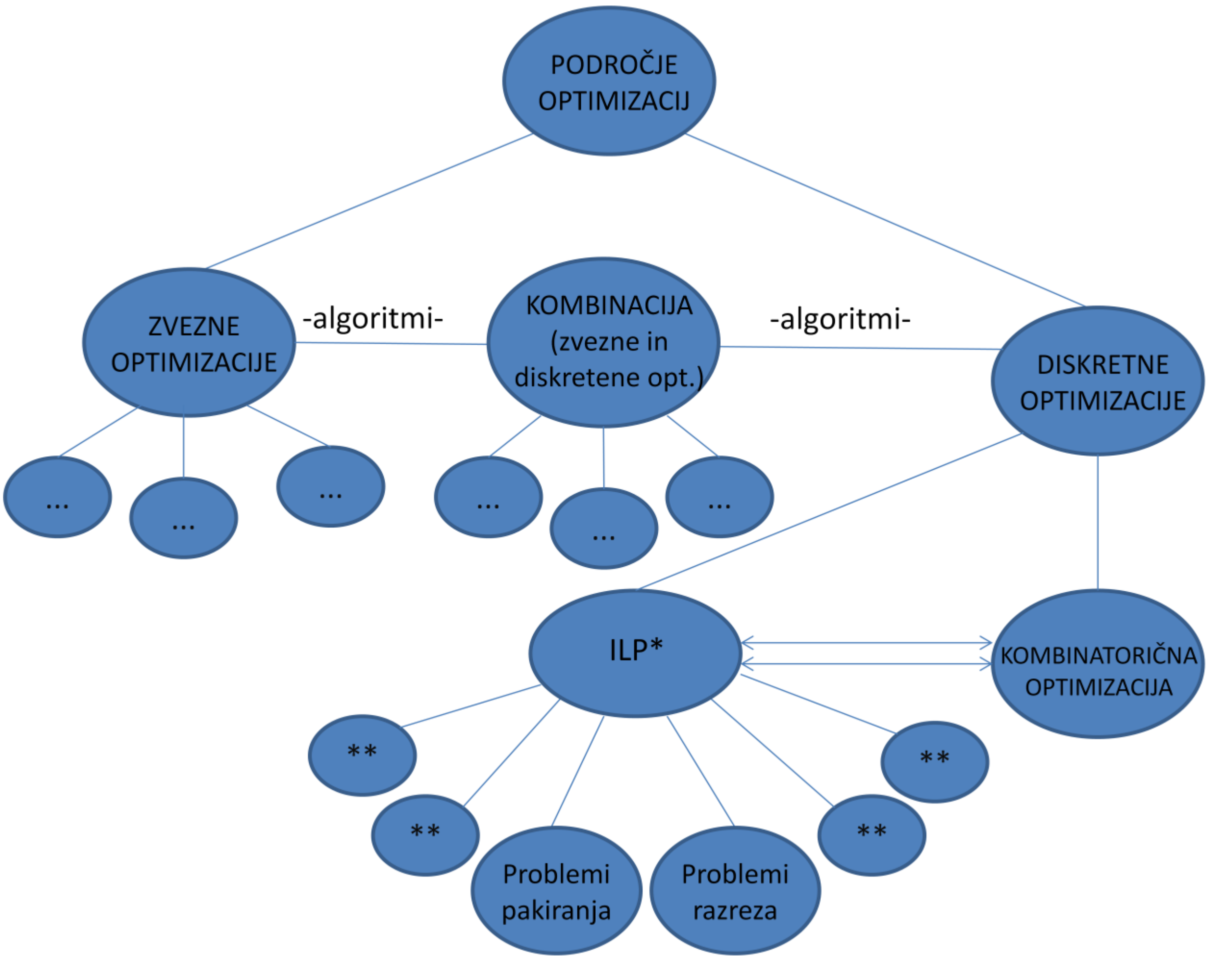
V zadnjem času se vedno več metod usmerja v reševanje ekonomskih problemov v kombinaciji s tehnološkimi panogami. Področje tako postaja tipičen primer operacijskih raziskav.

3.6 Uvrstitev enodimenzionalnega razreza po skupinah v operacijske raziskave

Problemi razreza in pakiranja se lahko pojavljajo v različnih podpodročjih operacijskih raziskav. Kljub temu se po problematiki večinoma uvršajo med diskretne optimizacije. Umeščenost problemov razreza v področje optimizacij prikazuje slika 12.

Tudi kadar se te probleme uvršča med diskretne optimizacije, je zaradi različnosti problemov na voljo večje število različnih metod reševanja. Čeprav se v praksi pri razrezu in pakiranju s predmeti rokuje v treh dimenzijah, je lahko v teoriji število dimenzij različno in je odvisno od števila merodajnih parametrov, ki so predmet optimizacije. Zato v teoriji nastopajo eno-, dvo-, tri- in večdimenzionalni problemi pri pakiranju in razrezu.

Slika 12: Umeščenost problemov razreza v področje optimizacij



Opomba 1: * ILP (angl. Integer linear programming, kar v prevodu pomeni linearno programiranje s celimi števili; kratek opis je umeščen v sklop k diskretnim optimizacijam).

Opomba 3: Področja ILP in Kombinatorična optimizacija sta vsebinsko prepletena.

Vir: Lastna skica.

Do sedaj je opis tematike razreza nastopal v sklopu naslednji tem:

1. operacijske raziskave → področje optimizacij (gl. sliko 2),
2. področje optimizacij → diskretne optimizacije → ILP → problemi razreza in pakiranja (gl. sliko 12).

Do enodimenzionalne optimizacije razreza po skupinah nadalje nastopa v sklopu naslednjih tem:

3. Problemi razreza → enodimenzionalni razrez → enodimenzionalni razrez po skupinah.

Predhodno opisujem še probleme pakiranja, ki si delijo isto tipologijo s problemi razreza.

3.7 Problemi pakiranja

Optimizacijske metode oz. metode reševanja problemov pakiranja se po pravilu večinoma pojavljajo v angleški literaturi; angl: *packing problems* (Khanafer *et al.*, 2012; Bortfeldt, 2013). Področje pa je zelo zastopano v nemški literaturi. Dve najbolj poznani tipologiji za področje pakiranja in razreza[56] so neodvisno v različnih delih postavili nemški znanstveniki Herald Dyckhoff leta 1990 (Dyckhoff, 1990) in Gerhard Wächer *et al.* leta 2007 s podrobnimi navedbami in razvrstitvijo problemov za področje pakiranja in razreza (Wäscher *et al.*, 2007). Nem. *Packungsprobleme*[57] (Lüdecke, 1999; Ristau, 2010) ali Packprobleme (Kahrs, 2009). Špan. *Problema de empaquetamiento* (Arias *et al.*, 2012)[58].

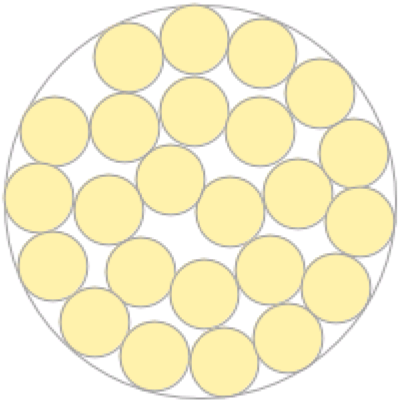
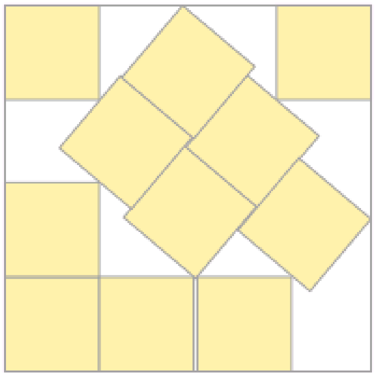
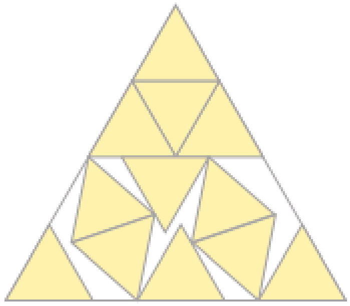
Probleme pakiranja je najlažje ponazoriti v sliki. Matematični spletni iskalnik Wolfram Mathematica probleme pakiranja prikazuje na primeru odprtega dimenzionalnega problema z izborom naslednjih kategorij (Wolfram Mathematica, 2013):

- pakiranje okroglih predmetov (v okrogli prostor[59]),
- pakiranje pravokotnih predmetov (v zaboj z ravnimi stranicami),
- pakiranje trikotnikov (v trikotne ravnine, piramidalne zaboje itd.),
- kombinacije med njimi *e.g.*:
    - pakiranje okroglih predmetov v pravokotne zaboje,
    - pakiranje trikotnikov v okrogle prostore
    - itd.

Kategorije zajemajo le nekatere primere pakiranja v dveh dimenzijah. Znani so še mnogi drugi primeri **pakiranja mnogokotnikov** z različnimi aplikacijami v praksi (Chélina et al., 2013)[60]. Pakiranje mnogokotnikov je po težavnosti *NP*-težek problem in spada v kombinatorično optimizacijo (Allen & Iacono, 2012).

[56] Tipologije so skupne za področje razreza in pakiranja. Podrobneje so opisane pri razrezu.
[57] Optimizacijske rešitve po nemško: Packungsoptimierung (Scheithauer, 2008).
[58] Članek uporabljam tudi kot referenco pri razrezu. Članek je zanimiv zaradi kompleksnega matematičnega modela.
[59] Prostor je sicer definiran v treh dimenzijah. Tu beseda prostor pomeni zaboj, ki je matematično lahko definiran v katerikoli dimenziji. Wolfram Mathematica sicer prikazuje primere v ravnini, torej v dveh dimenzijah.
[60] Problem iz celične mikrobiologije se ukvarja s teoretičnimi koncepti morfogeneze, *i.e.* biološkim procesom, ki povzroča razvoj (ustreznih) oblik organizmov. Procesi so v veliki meri še nepojasnjeni.

Nekateri izbrani primeri so prikazani v slikah 13-15, pri čemer so prikazane optimalne rešitve.

Slika 13: Primer krožnega pakiranja	Slika 14: Primer pakiranja kvadratov	Slika 15: Primer pakiranja trikotnikov
		
Opomba: primer pakiranja 24 enakih krogov znotraj čim manjše krožnice. Slika prikazuje najboljšo (znano) rešitev, polmer malih krogov je 0,176939 polmera velike krožnice. Vir: Wolfram Mathematica, 1.1.2013	Opomba: primer pakiranja 12 enakih kvadratov znotraj večjega kvadrata. Slika prikazuje najboljšo (znano) rešitev. Stranice malih so dolge 0,257931 velikega kvadrata. Vir: Wolfram Mathematica 1.1.2013	Opomba: primer najboljšega (znanega) pakiranja 12 enakokrakih trikotnikov znotraj večjega trikotnika. Razmerje stranic 5:19,5. Vir: Wolfram Mathematica, 1.1.2013

Metode za reševanje teh problemov so potrebne, kadar nastopata dve ali več dimenzij.

Pri odprtem dimenzionalnem problemu[61] so dani mali predmeti, ki morajo biti v celoti odrezani (pri razrezu) ali umeščeni (pri pakiranju) v enega ali več velikih objektov. Količina velikih predmetov je dana in nespremenljiva. Spreminja pa se lahko ena dimenzija objekta (ena dimenzija je spremenljivka). Cilj je najti čim manjši objekt. Kriterijska funkcija je torej minimizacija. Primer se lahko opiše tudi na primeru pakiranja mnogokotnikov (npr. krogov v ravnini) znotraj večjega mnogokotnika (npr. kroga v ravnini). Pri tem problemu je večji mnogokotnik spremenljive oblike. Mora pa biti čim manjši (Wäscher *et al*., 2007).

Poseben primer odprtega dimenzionalnega problema v dveh dimenzijah je tudi problem pakiranja oz. razreza na trakove (angl. *strip packing problem*). Pri tem problemu je potrebno male predmete zložiti na večji objekt ali trak z omejeno višino in neomejeno dolžino. Cilj je čim manjša uporaba traka po dolžini. Dvodimenzionalni predmeti so lahko poljubne oblike. Literatura najbolj pogosto omenja primere, pri katerih so mali predmeti

[61] Angl. Open dimension problem (Bortfeldt & Jungmann, 2012; Fu *et al.*, 2013).

pravokotne oblike (Martello *et al.*, 2003). Predmeti so lahko tudi nepravilnih oblik (angl. *Irregular strip packing problem*[62] ali *nesting problem*[63]).

Kadar je veliki predmet lahko spremenljive oblike, je to odprt dimenzijski problem, kadar pa so njegove dimenzije določene, je problem definiran kot problem pakiranja mnogokotnikov.

Problem pakiranja, kjer se na poti do rešitev uporablja katero od optimizacijskih metod, je aktualen že dalj časa in zajema številne kategorije problemov. Z vidika razreza so poleg naštetih problemov med pomembnejšimi še naslednji kategoriji:

- problem nahrbtnika,
- pakiranje v zaboje.

Vsi problemi so pomembni z vidika (so)uporabe metod oz. algoritmov pri reševanju problema razreza.

Problem nahrbtnika

Problem nahrbtnika[64] ima glede na ostale optimizacijske probleme relativno dolgo dobo raziskovanja. Problem se je namreč začel obravnavati že 1897 (Mathews, 1897). Kljub temu je svet na solidne algoritme za reševanje problema nahrbtnika čakal do (Horowitz & Sahni, 1974), nakar so sledile številne objave novih metod, med katerimi so najbolj citirane (Nauss, 1976), (Martello & Toth, 1977; Martello & Toth, 1978) in (Balas & Zemel, 1980).

Literatura problem umešča tako med *ILP*-probleme (Scheithauer, 2008) kot med probleme kombinatorične optimizacije (Mahajan et al., 2012), kar pomeni, da ima problem nahrbtnika značilne lastnosti z obeh področij.

Kot eden izmed najbolj uporabljenih[65] algoritmov je bil leta 1999 uvrščen na četrto mesto; za algoritme, ki rešujejo *bin-packing* problem (na tretjem mestu)[66], algoritme v zvezi podatkovno drevesno strukturo organiziranih končnice ali pripone[67] (na drugem mestu) in algoritme v zvezi z *k-d* drevesi[68] (prvo mesto). (Skiena, 1999).

[62] Gl. (Leung *et al.*, 2012).
[63] Gl. (Alves *et al.*, 2012).
[64] Angl. *knapsack problem* (Mahajan *et al.*, 2012) oz. *rucksack problem* (Burkova, 2009). Nem. *Rucksackproblem* (Ottmann & Widmayer, 2012). Rus. *задача о ранце (рюкзаке)* (Gluhov, 2013). Špan. *Problema de la mochila* (O'Connor, 1998).
[65] Glede na vzorec 75 algoritmov. Raziskovalna popularnost je nekoliko manjša (18. mesto) (Skiena, 1999).
[66] Problem je definiran v nadaljevanju.
[67] Angl. *suffix tree*. Problem kompleksnostne teorije, kjer podatki predstavljajo posamezen sklop črk (objekt oz. točka na drevesu). Aplikativno se algoritme uporablja pri iskanju vzorcev, npr. v strukturi DNK (Kuruppu *et al.*, 2102).
[68] V kompleksnostni teoriji *k-d* drevo (drevo *k* dimenzij) označuje organiziranost podatkov, pri katerih so različni objekti oz. točke urejeni v *k* dimenzijah. Primer: iskanje z večdimenzionalnim ključem (iskanje najbližjih sosedov) (Merry *et al.*, 2013). Veliko primerov na področju zajema in obdelave fotografij (Xiao-Dan Liu *et al.*, 2012) in izboljševanje kakovosti slik (Santos *et al.*, 2012).

Po kompleksnosti je problem nahrbtnika *NP*-poln[69], kar je dokazal Richard Karp leta 1972 (Karp, 1972; Garey, 1979[70]; Caprara *et al.*, 2013).

Problem je definiran kot optimalna sestava nahrbtnika, kar običajno pomeni, da je:

- vrednost vsebine maksimalna,
- prosta prostornina nahrbtnika minimalna in
- teža vsebine čim manjša.

Klasičen problem nahrbtnika je matematično definiran z naslednjimi spremenljivkami (Scheithauer, 2008):

- p … prostornina nahrbtnika;
- b_i … prostornina predmeta i, kjer je $i \in I = \{1, \dots, m\}$; $0 < b_i \leq p$;
- m … število predmetov *prostornine* b_i, ki se jih pakira v nahrbtnik;
- c_i ... vrednost predmeta i, $c_i \geq 0$;
- z_i … seštevek uporabe predmeta i pri pakiranju, kjer je $z_i \in \mathbb{Z}_+$.

Išče se tak nabor predmetov, ki po skupni prostornini ne presegajo p, hkrati pa je njihova vrednost maksimalna. Matematična formulacija za opisano je sledeča:

$$f(p) \coloneqq \max\left\{\sum_{i \in I} c_i z_i : \sum_{i \in I} b_i z_i \leq p, z_i \in \mathbb{Z}_+, i \in I\right\}$$

Navedeno lahko zapišem krajše z vektorsko notacijo, ki sem jo uporabil v poglavju programiranje s celimi števili (opis *ILP*-problemov), pri čemer se z upoštevanjem $b = (b_i, \dots, b_m)^T$, $c = (c_1, \dots, c_m)^T$ in $z = (z_1, \dots, z_m)^T$ lahko zapiše:

$$\boldsymbol{f(p) \coloneqq \max\{c^T z : b^T z \leq p, z_i \in \mathbb{Z}_+^m\}.}$$

Kot poseben primer literatura pogosto navaja 0/1-*knapsack* problem oz. problem 0/1 nahrbtnika. Wäscher et al. (Wäscher *et al.*, 2007) v svoji tipologiji imenujejo problem tudi kot enodimenzionalni problem nahrbtnika. Enodimenzionalni problem nahrbtnika je različica problema nahrbtnika, kjer skladno z opisano matematično formulacijo velja $z_i \in \{0,1\}$ za vse i (Sahni, 1975; Zhao & Li, 2013).

[69] Literatura vrednoti problem po težavnosti tudi kot *NP*-težek (Scheithauer, 2008; Xu, 2013). Opisano je že bilo, da je vsak *NP*-poln problem tudi *NP*-težek, kar pa ne velja nujno v obratni smeri. Običajno zato velja, da več kot ima problem dimenzij in/ali dodatnih omejitev, večja je težavnost reševanja; s stopnjevanjem težavnosti reševanja pa se problemi vedno bolj številčno uvrščajo med *NP*-težke. Težavnost problemov nahrbtnika je v povprečju večja pri multidimenzionalnem problemu nahrbtnika (Puchinger *et al.*, 2010) in kvadratnemu problemu nahrbtnika (Xu, 2012). Oba literatura po pravilu uvršča v množico *NP*-težkih problemov.

[70] Knjiga ima z letom 2013 nad 42.000 citatov (Google Scholar, 2013).

Ta različica problema ima različne aplikacije v praksi, od kemijskih reakcij (Truong *et al.*, 2013), biologije *DNK* (Taghipour *et al.*, 2013) in do poslovnih oz. transportnih modelov (Xu, 2013).

Problem 0/1 nahrbtnika med drugim rešujejo t. i. požrešni algoritmi. Požrešna metoda je primerna za reševanje problema 0/1 nahrbtnika, ker je njen princip delovanja tak, da v vsakem sklopu izbere predmet z največjo vrednostjo na enoto prostornine, *i.e.* $max(c_i / b_i)$. Požrešno metodo za reševanje tega problema je med prvimi predstavil Dantzig (Dantzig, 1957).

Pri takem načinu reševanja ne gre za zapleten program. Težave nastopajo pri iskanju primernega vrstnega reda reševanja in v dokazovanju, da požrešna metoda dejansko najde optimalno rešitev.

Požrešni algoritem je eden pomembnejših načinov reševanja problemov razreza, zato prilagam opis primera, ki rešuje problem 0/1 nahrbtnika.

Od ostalih različic problema naj omenim še:

- problem delne vsote (*subset-sum problem*)[71],
- kvadratni problem nahrbtnika,
- multidimenzionalni problem nahrbtnika.

Kvadratni problem nahrbtnika maksimira kvadratno kriterijsko funkcijo pri linearnih omejitvah nahrbtnika. Problem je v zadnjih letih predmet obsežnih raziskav. Kljub opaznemu napredku v tem času je posamezne probleme v tem razredu še vedno zelo težko rešiti. Z izjemo posameznih primerov so metode reševanja pri teh problemih omejene na nekaj sto spremenljivk in na en nahrbtnik (Wang *et al.*, 2012). Okvirno maksimalno število spremenljivk za te probleme je nedavno določil tudi Xu; kvadratni problem nahrbtnika pri tem klasificira kot *NP*-težek (Xu, 2012).

Pri problemu multidimenzionalnega problema nahrbtnika je potrebno rešiti več problemov nahrbtnika hkrati (Lust & Teghem, 2012). Problem je zato podoben problemu pakiranja v zaboje. Razlika je v tem, da pri problemu nahrbtnika ni potrebno uporabiti vseh predmetov, ki so na razpolago.

Problem pakiranja v zaboje[72]

Pri pakiranju v zaboje je potrebno uporabiti minimalno število zabojev, kamor je potrebno umestiti vse predmete. Problem je *NP*-težek (Martello & Toth, 1990; Bang-Jensen & Larsen, 2012; Beigel & Fu, 2012).

[71] Problem je na kratko predstavljen pri *NP*-problemih. Zelo poznan v kriptografiji, kjer je mogoče uporabiti tudi ostale probleme nahrbtnika (Kumar *et al.*, 2012; Lyubashevsky *et al.*, 2010).
[72] Oz. posode.

Problem pakiranja v zaboje[73] je po matematični formulaciji zelo podoben problemu razreza. Edina konceptualna razlika je v tem, da se pri razrezu ne pakira manjših predmetov v večje, temveč se manjše predmete od večjih jemlje (odreže) (Baldi *et al.*, 2012 in 2012a). Matematično notacijo za ta problem opisujem pri problemih razreza.

4 PROBLEMI RAZREZA (LITERATURA, METODE, TIPOLOGIJE IN MATEMATIČNI MODELI)

Poglavje vsebuje teoretično jedro doktorske disertacije.

4.1 Analiza literature

Cilji analize znanstvenih člankov so predvsem:

- identificirati znanstvenike z največ objavami (kvantiteta objav);
- predstaviti popularnost raziskovanja problemov razreza skozi daljše obdobje;
- prikazati primerjavo z drugimi področji operacijskih raziskav.

Analiza literature je narejena na portalu *Web of Science* (Web of Knowledge, 2013) ob pomoči orodja za pregled znanstvene literature Google Scholar (2013).

Pri tem se je za področje razreza pri analizi in kasneje pri povzemanju literature uporabilo naslednje izraze, ki so razvrščeni po jezikih[74]:

Angleški jezik[75]:

- *cutting stock / cutting-stock (problem)* (Lu *et al.*, 2013),
- *nesting / partitioning (problem)* (Mei, 2012),
- *trim loss (problem)* (Gradišar *et al.*, 2011),
- *guillotine problem* (Furini *et al.*, 2012),
- *bin packing (problem)* (Dell'Amico *et al.*, 2012),
- *strip packing* (Cui *et al.*, 2013),
- *vector packing + cutting* (Shachnai & Tamir, 2012),
- *knapsack + cutting (problem),*
- *multiprocessor scheduling (problem)* (Wu & Xia, 2012),
- *usable leftovers* (Gradišar *et al.*, 2011).

Nemški jezik:

- *Zuschnitt* (*problem(e)* / *-soptimierung(en)*) (Scheithauer, 2008),
- *Rucksack + Zuschnitt,*

[73] Angl. *Bin packing problems* (Muritiba *et al.*, 2010). Nem. *Das Bin Packing-Problem* (Scheithauer, 2008) ali *das Behälterproblem* (Kahrs, 2009).
[74] Zapisan je iskalni niz.
[75] Ob izrazih navajam še reference.

- *Behälterproblem* (Kahrs, 2009),
- *Bin Packing* (Scheithauer, 2008).

Ruski jezik:
- *задача раскроя* (Kantorovič, 1939; Gradišar & Resinovič, 2000),
- *задача о ранце / рюкзаке* (Gluhov, 2013).

Španski jezik:
- *problema de la mochila* (O'Connor, 1998),
- *problema de corte* (Arias et al., 2012),
- *problema* + *guilotina*.

Portugalski jezik:
- *problema de corte de estoque* (Limeira, 2005),
- *sobras aproveitáveis* + *corte* (Cherri, 2009).

Avtorji (lahko nastopajo tudi kot soavtorji) z največjim številom člankov za probleme razreza so prikazani v tabeli 2.

Tabela 2: Prvih petnajst avtorjev po številu člankov za področje razreza v angleški literaturi

Avtor	**Število znanstvenih člankov**	**Delež**
CUI YD	46	6,0%
SCHEITHAUER G.	16	2,1%
DE CARVALHO J. M. V.	15	1,9%
HIFI M.	14	1,8%
KENDALL G.	13	1,7%
BURKE E. K.	11	1,4%
ARENALES M. N.	10	1,3%
TERNO J.	10	1,3%
VANDERBECK F.	10	1,3%
YANASSE H. H.	10	1,3%
ALVES C.	9	1,2%
GRADISAR M.	9	1,2%
MONACI M.	8	1,0%
BELOV G.	7	0,9%
WÄSCHER G	7	0,9%

Vir: *Web of Science, 2013.*

Obstaja več avtorjev s sedmimi članki. Izmed njih sem izbral pomembnejša, in sicer raziskovalca Belov in Wäscher.[76]

[76] Članki raziskovalcev so bolj citirani kot pri ostalih avtorjih.

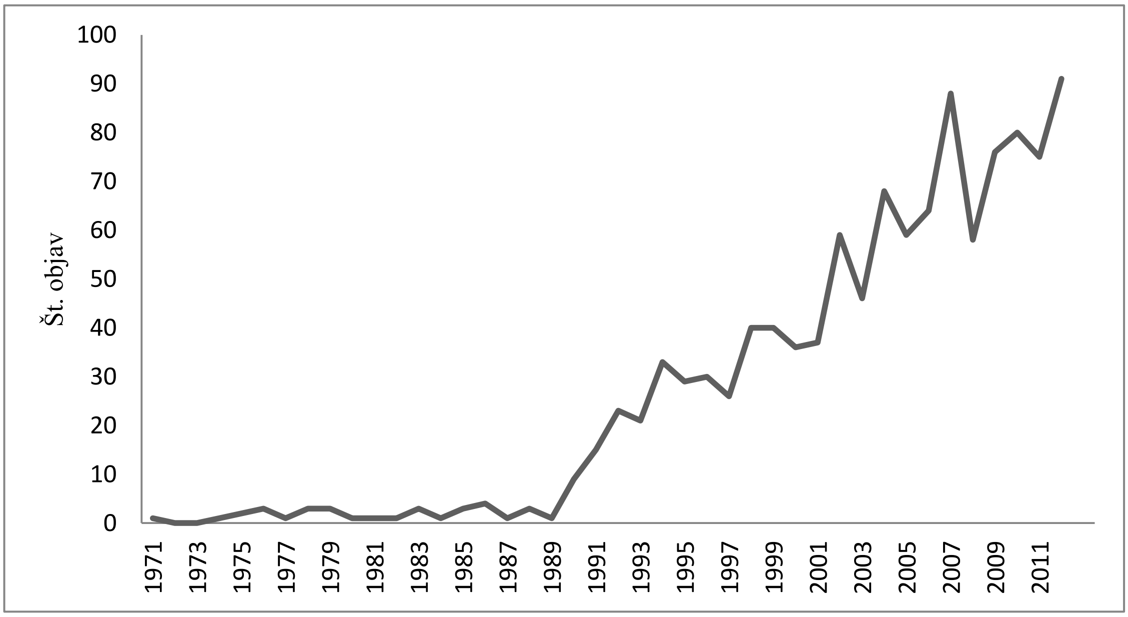
Če bi presojali še po kvaliteti (po številu citatov in po faktorju vpliva za posamezne članke), bi navedenemu spisku dodal vsaj še naslednje avtorje:

- Gilmore P. C.,
- Gomory R. E.,
- Dyckhoff H.

Z razširitvijo na še ostale probleme, kot je na primer problem pakiranja v zaboje, pa je potrebno omeniti še naslednje avtorje:

- Caprara A.,
- Pisinger D.,
- Clautiaux F.,
- Martello S.

Slika 16: Število objav znanstvenih člankov na temo razreza od 1971 do 2012



Vir: *Web of Science*.

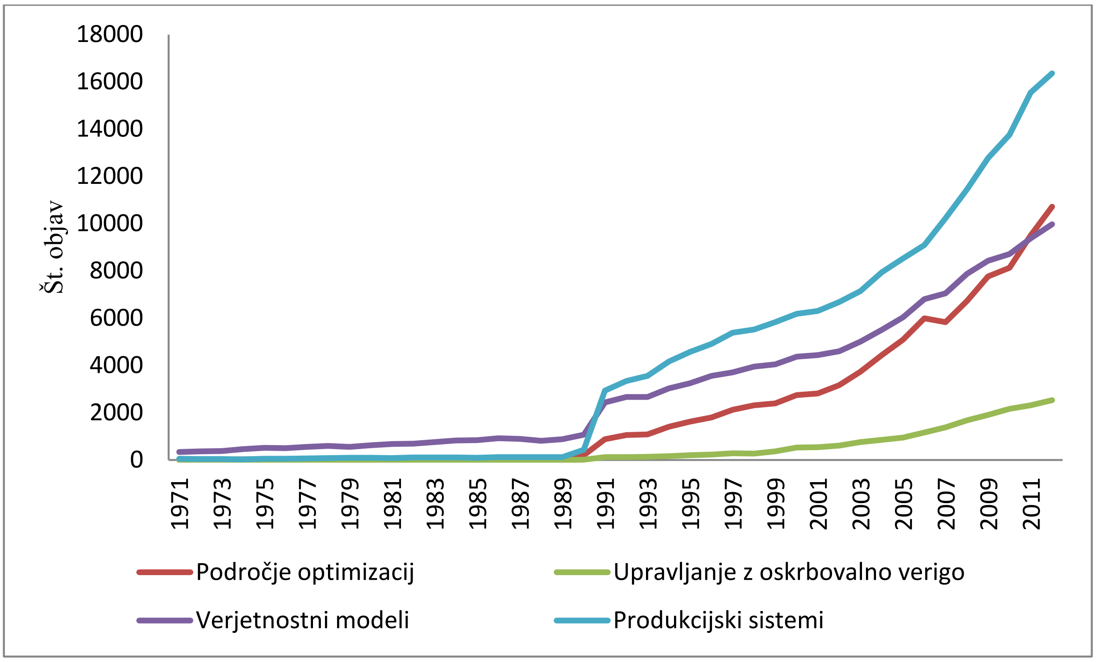
Pri analizi se lahko isti članki pojavijo pri več različnih iskalnih nizih, zato sem rezultate temu ustrezno prilagodil.

Iz grafičnega prikaza (slika 16) je razvidno naslednje:

- stagnacija raziskovanja problema prvih 30-ih let oz. 50-ih let, če se šteje od (Kantorovič, 1939);
- stalen trend rasti po letu 1990;
- padec števila objav leta 2007;
- 2012 je bilo objav največ v zgodovini (ocenjujem, da bo tudi leto 2013 rekordno, saj lahko število objav preseže mejo 100 člankov).

Število člankov po posameznih področjih znotraj razreza in pakiranja prikazuje tudi (Wäscher *et al.*, 2007).

Slika 17: Analiza literature po glavnih področjih znotraj operacijskih raziskav od 1971 do 2012



Vir: Web of Science, 2013

Zanimiva je primerjava števila objav po letih s področja optimizacijskih problemov (kamor se uvršča razrez) z ostalimi področji v sklopu operacijskih raziskav. Primerjavo prikazujem v sliki 17, vendar pri tem dodajam opombo, da je primerjava le približna. Zaradi velikega števila člankov, ki jih je okoli milijon, nekateri verjetno niso bili zajeti, medtem ko nekateri lahko nastopajo na več različnih področjih[77]. V nekaterih člankih se prepletajo številna področja operacijskih raziskav, zaradi česar je članek nekoliko težje uvrstiti (e.g. algoritmi, simulacije in statistika). Kljub temu da analiza ni eksaktna, pa vseeno prikazuje okvirno stanje objav po področjih.

Iz grafičnega prikaza (slika 17) lahko razberemo:

- porast objav po letu 1990 (razen področja: management oskrbovalne verige);
- stalen trend rasti po letu 1990 za vsa področja;
- da so optimizacijski problemi po številu objav po letu 2010 prehiteli verjetnostne modele (sem se uvrščajo diskretne optimizacije in s tem problemi razreza);
- da je bilo leta 2012 največ objav v zgodovini (vse kaže, da bo tudi leto 2013 rekordno).

Glede na prikazano bi rad dodal, da je področje produkcijskih sistemov močno zastopano tudi pri patentih.

[77] Slednje sem nekoliko omejil z uporabo operatorja »–« pro iskalnem nizu.

4.2 Opis literature

V tem poglavju predstavljam patente, pregled literature znanstvenih člankov, tipologij in matematičnih formulacij za glavne probleme razreza.

4.2.1 Patenti

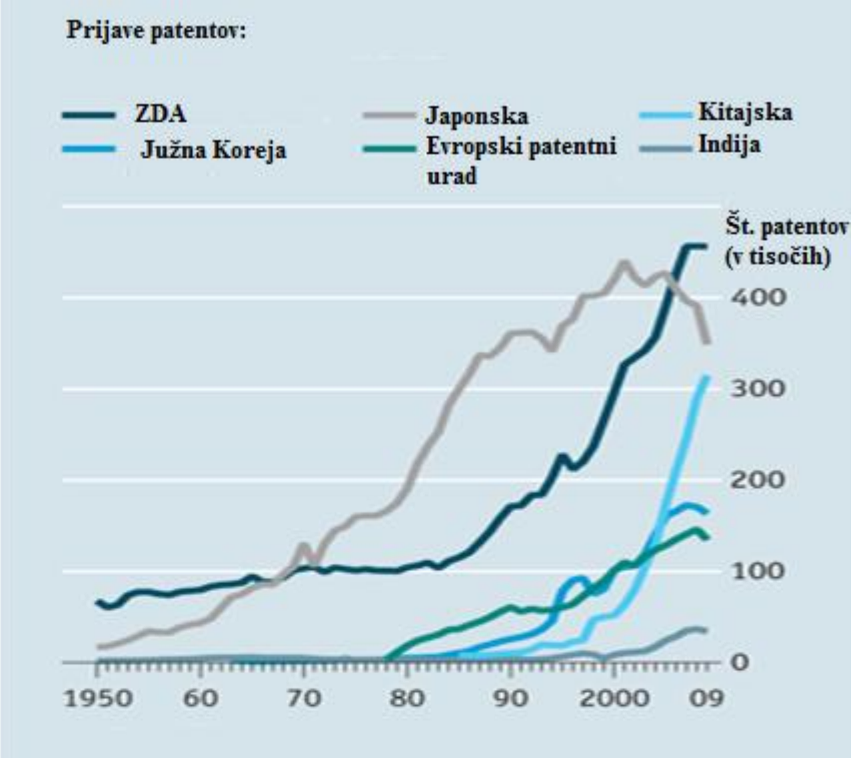
Patenti so pomembna tehnološka komponenta znanosti (v kolikor tehnologije ne razumemo ločeno od znanosti). Pozornost patentom posvečam zlasti zaradi naslednjih razlogov:

- algoritme se lahko patentira (ne le objavi v revijah);
- patenti so se glede na znanstvene članke pojavili veliko prej[78];
- pri patentih jezik ni ovira, pri znanstvenih člankih posredno je (večja možnost citiranja in s tem faktor vpliva, če je članek objavljen v angleškem jeziku);
- prijava patenta ima za cilj gospodarsko korist, objava članka ima večinoma tudi druge prioritete;
- patenti so v nekaterih državah bolj spoštovani kot znanstveni članki (npr. Kitajska);[79]
- v zadnjem času je na nekaterih znanstvenih področjih moč opaziti vedno bolj izrazit trend rasti inovacij na račun patentov in vedno manjši delež inovacij na račun objav znanstvenih člankov (Hamilton, 2001; Tansey & Stembridge, 2005)[80].

Slika 18 prikazuje rast števila patentov za različne države po svetu (World Intellectual Property Organisation (WIPO), 2013). Opazna je izrazita rast prijav v vseh državah razen Japonske (negativni trend po letu 2000).

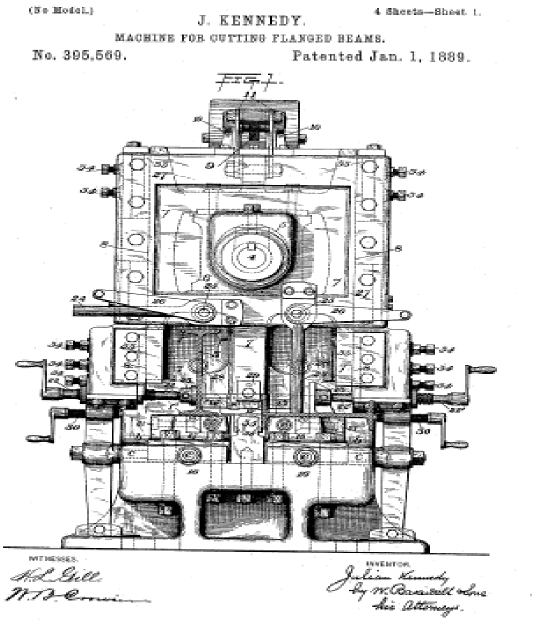
[78] Prvi patenti za področje razreza so se v ZDA pojavili kakšnih sto let pred prvim opisom reševanja problema razreza v znanstveni literaturi.
[79] Kitajska ima 6,7% delež objav v operacijskih raziskavah; ZDA pa 34,9% (VB: 8,5%, Nemčija: 6,9%) (Web of Science, 2013).
[80] Nanotehnologija, kot izrazito tehnološko področje, bo imela 80 % inovacij na račun patentov v prihodnjih petih letih.

Slika 18: Rast števila prijav patentov po državah



Vir: WIPO, 2011.

Slika 19: Sprednja stran patenta



Vir: Kennedy, 1889.

Patenti za področje razreza iz 19. st. obsegajo različne vrste prototipov.

S sliko 19 prikazujem enega izmed takih patentov, ki opisuje stroj za avtomatiziran razrez nazobčanih jeklenih profilov (Kennedy, 1889).

Patent je še iz dobe pred Nikolo Teslo, zato stroj ne deluje na električno energijo.[81]

Patent vsebuje:

- skico prednje strani stroja (na sliki),
- skico bočne strani,
- skico zadnje strani,
- podroben načrt pomembnejših sestavnih delov,

[81] To je razvidno iz prednje strani načrta, kjer se opazi večje število ročnih pedalov za različne faze razreza.

- opis sestavnih delov patenta,
- opis delovanja patenta,
- izjavo, da je izum plod lastne ideje inovatorja.

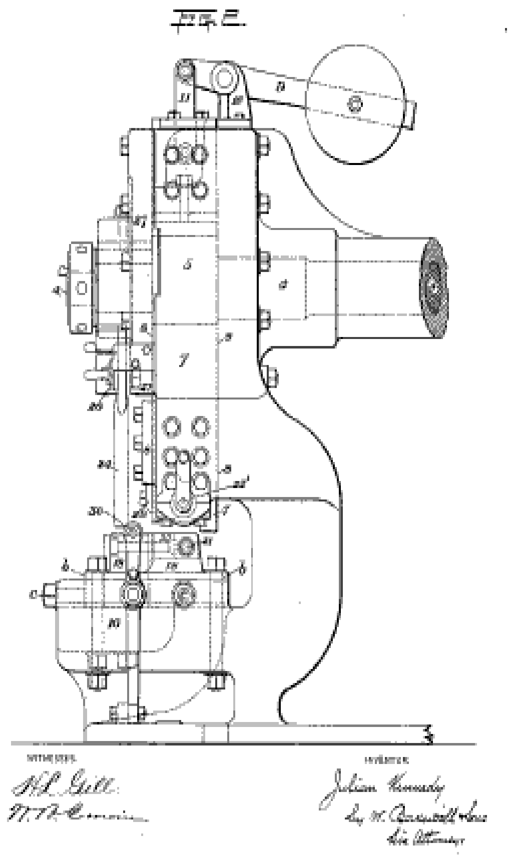
Bočna stran patentiranega stroja prikazuje, kje poteka razrez jeklenih palic (zgornja polovica, izbočeni del).

Za razrez jeklenega materiala je iz tega obdobja še nekaj patentov. (Potter, 1892) poleg stroja za razrez jeklenih profilov oblike T in I opisuje še način poteka aktivnosti razreza, ki jo imenuje z besedo »umetnost«.

Nekateri patenti omogočajo brušenje koncev palic po razrezu, *i.e.* (Cornell, 1872).

Ostali patenti za razrez jeklenih palic so še (Carnahan, 1888), (Köhler, 1890), (Hammond, 1894), (Sheldon, 1896) in drugi.

Slika 20: Bočna stran patenta



Vir: Kennedy, 1889.

Poleg patentov za rezanje jeklenih palic so se tisti čas patentirali tudi stroji za rezanje papirja. Nekateri so poleg osnovne funkcije rezanja ponujali še nekatere dopolnitve, ki so skrajšale proizvodnje linije. Primer sta proizvodnja in razrez brusilnega papirja, ki ju v zasnovi hkrati opravi stroj, ki je iz prve polovice 19. stoletja (Gage, 1848).

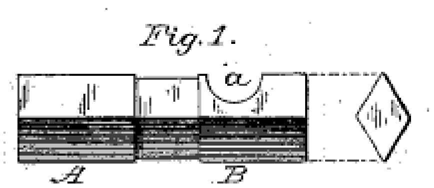
Razrez papirja je bil v tistem času zelo aktualen, o čemer priča relativno veliko število patentov. Eni izmed prvih so: (Dougherty, 1862), (Hatch, 1869), (Arkell, 1872) in (Cohek, 1875).

Izmed drugih panog naj omenim še lesno panogo. Patenti v tej panogi so imeli različen namen. Nekateri so bili namenjeni rezanju in proizvodnji lesenih vijakov. Lepi primeri so stroji, ki so jih patentirali (Read, 1837), (Keane, 1838), (Sellick, 1838) in (Bead, 1846). Panoga lesenih vijakov je bila pomembna, izboljšav strojev s tega področja je bilo veliko. Patenti s področja vijakov so bili eni redkih in pomembnejših v tistem času. Ostalih patentov med 1800 in 1850 sicer ni bilo veliko, kar še dodaja težo področju.

Patentirani stroji za proizvodnjo lesenih vijakov niso edini s področja razreza lesa. Patentiralo se je tudi stroje za standardni razrez oz. žaganje lesa, *i.e,* (Smith, 1855), (Hodge, 1861) in drugi.

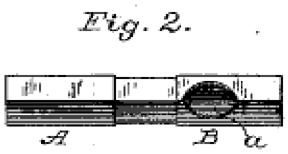
Primeri patentov obsegajo tudi nekatere, za današnje čase eksotične, druge panoge. Ena od takih je rezalnik za konice cigar, lep primer predstavlja patent (Oakman, 1882)[82]. Patent podrobno predstavljam v slikah 21-27, kjer je dobro razvidno, kako podrobno je potrebno opisati patent. Slednje je inovator storil v sedmih posameznih slikah oz. patentih načrtih.

Slika 21: Bočni pogled



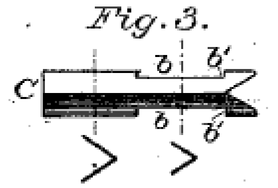
Vir: Oakman, 1882.

Slika 22: Horizontalni pogled



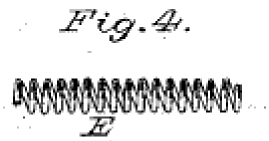
Vir: Oakman, 1882.

Slika 23: Sestavni deli, notranjost



Vir: Oakman, 1882.

Slika 24: Sestavni deli, notranjost

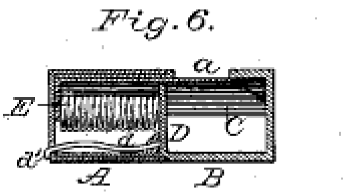


Vir: Oakman, 1882.

Slika 25: Del notranjega mehanizma

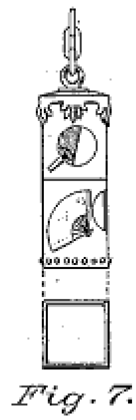
Vir: Oakman, 1882.

Slika 26: Sestavljanje notranjih delov



Vir: Oakman, 1882.

Slika 27: Končni proizvod



Vir: Oakman, 1882.

Patenti za rezanje konic cigar so aktualni tudi sedaj, kar kaže primer (Ghavami, 2000). Na tem primeru je lepo vidna primerjava med patentoma za isto področje, vendar z več kot sto leti razlike. Sedaj je patentna dokumentacija bolj podrobna, obsega več strani, načrti so računalniško izrisani.

82 Iz evidence je razvidno, da je bil patent odobren kar sto let za tem, ko je prosilec zanj zaprosil (Oakman, 1882).

Poleg različnih tehnoloških inovacij s področja razreza, ki jih poznamo danes in so skoraj z vseh področij, je možno patentirati tudi algoritem. Za področje razreza taki algoritmi večinoma prihajajo iz gospodarstva[83], kjer se običajno sledi ekonomskim interesom.

Patentiranje algoritmov za področje razreza se je resneje začelo z računalniško dobo nekje po letu 1980 (Jolly & Singh, 1987). Pri patentiranih metodah je potrebno ločiti med tistimi, ki spadajo pod operacijske raziskave, in tistimi, ki tja ne spadajo.

(Jolly & Singh, 1987) je primer patentirane kombinacije tehnologije in metode. Algoritem opisuje metodo, ki nadzoruje aktivnost rezanja z visoko temperaturo. Metoda je primer, ki ne spada v operacijske raziskave.

Primeri patentov, ki se jih lahko uvršča v področje operacijskih raziskav (med optimizacijske probleme), se številčnejše pojavljajo zadnjih deset let. Patenti opisujejo tako tehnologijo kot metodo (algoritem), pri čemer so metode tesno povezane z določeno vrsto stroja oz. vrsto tehnologije in opisujejo postopek obravnavanja materiala (npr. funkcije posameznih delov stroja v določenem času). Splošne rešitve so zelo redke. Opisano je razvidno na primeru patenta (Beffrey *et al.*, 2008).

Primer dela metode, ki nadzoruje potek razreza materiala, je prikazana s sliko 28 iz patenta (Masouz *et al.*, 1992). Praviloma je algoritme moč opisati na različne načine. En način je prikaz njegove logične strukture, kot je to storjeno na prikazanem primeru.

Algoritem nadzoruje razrez materiala in odlaga material na optimalno mesto. Material prihaja v stroj naključno. Metoda mora pri razrezu za vsak prispel kos pogledati v načrt razreza in kos ustrezno odrezati.

Patent povezuje področji razreza in pakiranja, ker material po razrezu skladišči na palete na čim bolj optimalen način (išče optimalno razporeditev tovora, kar je optimizacijski problem[84]).

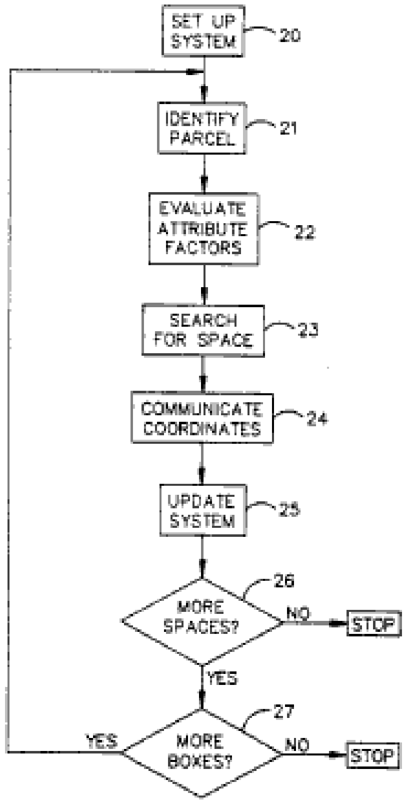
Podobno obnašanje stroja, kot je opisano v patentu, je zaželeno tudi pri problemih enodimenzionalnega razreza po skupinah, pri katerih se mora material ustrezno skladiščiti, in pri problemih razreza z uporabnim ostankom, pri katerih je potrebno vračati uporabne ostanke nazaj v zalogo.

---

[83] Avtorji patentov s področja razreza večinoma nimajo objav znanstvenih člankov (ocena, ki temelji na pregledu 40-ih patentov po letu 1980).

[84] V sklopu problemov pakiranja.

Slika 28: Del metode pri razrezu materiala, ki je priložena patentni dokumentaciji



Vir: Masouz et al., 1992.

Za področje razreza kovinskih palic oz. profilov je bilo patentiranih več algoritmov, v zadnjem času so taki primeri (Tanida, 2009), (Ylitalo, 2011), (Borovicka *et al.*, 2012) in (Ohlsson, 2012).

Za področje razreza papirja oz. materiala z ravnimi ploskvami so patentirani številni algoritmi, kot so (Beffrey *et al*., 2008), (Strong & Olsen, 2011) in (Erkkilä *et al.*, 2008) in ki so uporabni pri različnih proizvodnih panogah[85]. Za to področje je značilno povečanje število prijav patentov pri Evropski patentni agenciji (European Patent Office, 2013; United States Patent Office, 2013).

Obstajajo tudi razne druge panoge, kjer so patentirane metode povezane z razrezom; poleg proizvodnih panog se metode uporablja tudi v panogah z visoko dodano vrednostjo. Med večjimi in pomembnejšimi panogami naj omenim še naslednji dve:

- promet in avtomobilska industrija (Buerkle *et al.*, 2013);
- medicina, kjer je opazen porast algoritmov, ki opisujejo kirurške operacije z robotskimi rokami (Boukhny *et al.*, 2012) in (Park & Kim, 2013) ali (Mittelstadt & Park, 2013).

[85] (Erkkilä et al., 2008) je patent s področja filmske industrije.

Z vidika doktorske disertacije so najpomembnejši izmed patentiranih algoritmov tisti, ki rešujejo problem razreza[86]. Pri pregledu literature in pri primerjavi števila objav znanstvenih člankov in patentiranih metod v zadnjih desetih letih ocenjujem, da letno število patentov lahko kmalu preseže letno število objav metod v člankih. V analizi literature sem pokazal, kako je področje razreza v trendu rasti (ni pričakovati bistvenih odklonov pri številu novih znanstvenih objav). Pri patentih se vedno večjo pozornost namenja razvoju novih metod. To je glavna razlika pri primerjavi glede na stanje pred desetimi leti.

Pri patentiranih problemih razreza vidim glavno slabost v tem, da so algoritmi v primerjavi s članki:

- bistveno manj splošni (v več primerih gre za prilagoditve že obstoječih rešitev določeni strojni tehnologiji v podjetjih in/ali specifičnim poslovnim procesom za določeno podjetje) in
- manj kvalitetni (mnoge rešitve so po kakovosti slabše od objavljenih metod v člankih).

Kvaliteta se sicer v zadnjih letih opazno izboljšuje. Nekateri patenti so po kakovosti povsem enakovredni člankom.

Ocenjujem, da bo spremljanje tega področja s časom vedno bolj pomembno (ob predpostavki, da se bo število novih patentov v prihodnosti še povečevalo in da bo kakovost vsaj na ravni iz zadnjih nekaj let).

Patentirane metode za problem razreza so se začele pojavljati po 1990. Ene prvih patentiranih metod so (Maruyama *et al.*, 1991), (Lirov & Segal, 1993) in (Lirov & Segal, 1999)[87].

Sedaj vedno več patentov vsebuje vsestranske rešitve. Eden izmed primerov je patent (Roise, 2011), ki opisuje način in tehnološko podprtost pri optimizaciji pri razrezu različnih materialov. V osnovi algoritem optimizira razrez z združevanjem kosov v vzorce na strani ponudbe, za katere išče predmet na zalogi, pri katerem pride pri določenem vzorcu do minimalnega neuporabnega ostanka. Pri tem je v patentu tudi opis metode, ki poleg optimizacije razreza predlaga še rešitve z vidika optimizacije poslovnih procesov. Tu preučuje stroške dela, materiala in čas pri iskanju rešitve. Algoritem se lahko upravlja s posebnim računalniškim programom, ki je narejen v uporabniku prijazni obliki.

V zadnjem času patentirani algoritmi za področje razreza vedno večjo pozornost namenjajo algoritmom – nekateri tudi v obliki programskih rešitev, ki so uporabnikom prijazne – in ne več toliko inovacijam v mehanizaciji. Pri reševanju problemov se med drugim uporablja

[86] *CSP* (angl. Cutting-stock problem).
[87] Patent se je vložil leta 1991, izdan pa je bil leta 1999.

tudi nekatere relativno nove pristope, kot so genetski algoritmi (Horn, 2007; Wong & Chan, 2011).

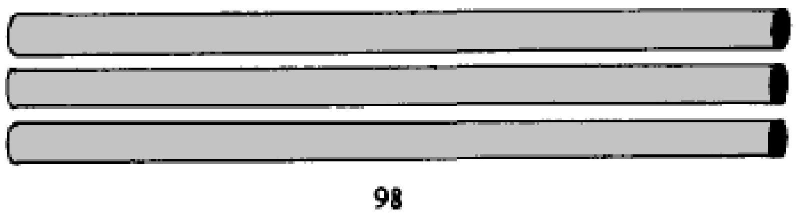
4.2.2 Pregled literature, tipologij in matematičnih modelov za probleme razreza

Za opis problema zadoščata dve množici predmetov (gl. tudi sliko 29 in 30):

- množica velikih predmetov (input, zaloga) in
- množica malih predmetov (output, povpraševanje).

Kadar se problem opisuje v eni dimenziji, se uporablja besedo palica (ne več predmet). Predmet je v realnosti še vedno v treh dimenzijah, le da razrez poteka le po eni. Pri palicah je to njihova širina.

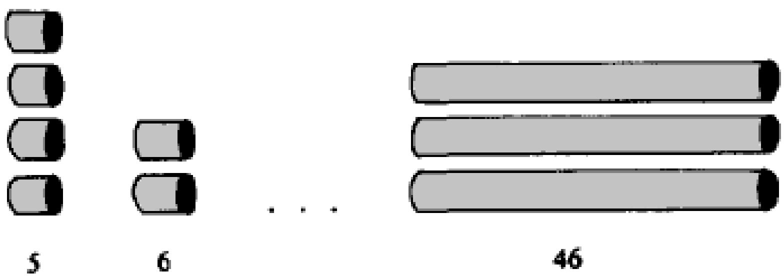
Slika 29: Palice na zalogi



Vir: Dyckhoff, 1990.

Slika prikazuje nabor treh kosov palic enake dolžine (98 dm), ki so na zaloge. Dolžine palic ni mogoče spreminjati in asortimenta na zalogi ni mogoče spreminjati. Od teh palic se proizvajajo (odrežejo) manjše palice, ki se zahtevajo v naročilu. Naročilo je sporadično glede dimenzij zahtevanih komponent in ga ni mogoče predvideti. Specifikacije, zahtevane v naročilu, so torej stohastični proces, ki je bil opisan v sklopu verjetnostnih modelov.

Slika 30: Naročene palice



Vir: Dyckhoff, 1990.

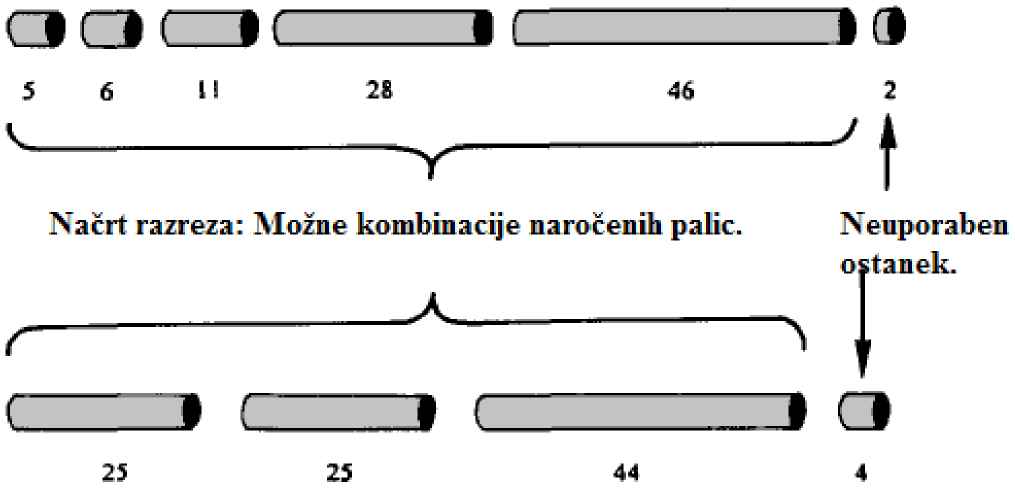
Naročilo v prikazanem primeru obsega različne dolžine in kose palic. Prikazani so štirje kosi z dolžino 5 dm, dva z dolžino 6 dm, en z dolžino 11 dm, dva z dolžino 25 dm, en z dolžino 28 dm, en z dolžino 44 dm in trije z dolžino 46 dm.

Cilj je narediti podmnožice naročenih palic, tako da se čim bolje prekrivajo s posameznimi elementi množice palic na zalogi, kjer velja:

- naročene palice se medsebojno ne smejo prekrivati, kar je potrebno upoštevati pri načrtu razreza, in
- naročene palice so lahko umeščene le znotraj velikih predmetov.

Načrt enodimenzionalnega razreza naročenih palic iz palic na zalogi je odvisen od cilja pri reševanju problema. Praviloma je to minimiziranje ostanka neuporabnega materiala.

Slika 31: Načrt razreza



Vir: Dyckhoff, 1990.

Načrt razreza prikazuje možne načine razreza. Naročene palice morajo biti odrezane čim bolj optimalno. Iz slike 31 je razvidno, da je neuporaben ostanek večji pri razrezu druge palice, ki znaša 4 dm. V kolikor bi znašal vsaj 5 dm, bi ta kos lahko bil ponovno uporaben pri izpolnjevanju naslednjih naročil. V tem primeru bi ga morali vrniti v zalogo.

Problemi razreza so *ILP*-optimizacijski problemi, ki se uvršajo med *NP*-polne in/ali *NP*-težke probleme.

Problem je prvi opisal ruski matematik in prejemnik Nobelove nagrade za ekonomijo Leonid Vitaljevič Kantorovič[88] (1912-1986). Kantorovič je Nobelovo nagrado prejel leta 1975 za reševanje linearnih problemov s *simplex* metodo[89] (Nobelprize.org, 2013).

Problem je najprej predstavil v ruskem jeziku (Kantorovič, 1939), ki mu je nekoliko kasneje sledila še angleška različica (Kantorovič, 1960). Pri problemu se osredotoča na eno dimenzijo, kar pomeni, da je opisan model enodimenzionalnega razreza. Glavna pomanjkljivost Kantorovičevega modela za enodimenzionalni razrez je v tem, da ni predstavljena učinkovita metoda za reševanje. Del razlogov za to je bil tudi v tem, da uporaba računalnikov v tistem času še ni bila na voljo.

Matematična formulacija problema (Kantorovič, 1939) vsebuje naslednje spremenljivke (Scheithauer, 2008):

---

[88] Rus. *Леонид Витальевич Канторович*.
[89] Metoda je opisana v poglavju Linearno programiranje.

l_i	→	dolžina naročene palice i;
b_i	→	kosi naročene palice i;
L_j	→	dolžina palice j na zalogi;
I	→	število različnih dolžin palic i;
K	→	(minimalno) število palic, ki se jih na zalogi uporabi za izpolnitev naročila;
$y_k,\ k = 1, \ldots, K$	→	k-ta uporabljena palica na zalogi (vrednost y_k je lahko 0 ali 1; 0 pomeni, da palica k ni bila uporabljena, in 1, da je uporabljena);
x_{ik}	→	vzorec, ki pove, kako pogosto se palica k na zalogi za določeno naročilo uporabi.

Kriterijska funkcija je:

$$z^{Kant} = min \sum_{k=1}^{K} y_k$$

Išče se tak način razreza palic, da je njihova skupna uporabljena dolžina na zalogi minimalna.

Pri pogojih / omejitvah:

1) $\sum_{i \in I} l_i k_{ik} \leq L \cdot y_k, \qquad k = 1, \cdots, K$

Material na zalogi mora po dolžini presegati skupno dolžino naročenih palic.

2) $\sum_{k=1}^{K} x_{ik} \geq b_i, \qquad i \in I$

Naročeni kosi palice i se lahko v celoti proizvedejo iz palice na zalogi. Posredno to hkrati pomeni, da neuporaben ostanek materiala lahko nastopa pri palici iz zaloge in ne pri naročeni palici.

3) $y_k \in \{0,1\}, \qquad x_{ik} \in \mathbb{Z}_+, \qquad i \in I, \qquad k = 1, \cdots, K.$

Zadnje omejitve, ki so predstavljene pod tretjo točko, so same po sebi razumljive.

Kantorovič kasneje v sodelovanju z Zalgallerjem razvije algoritem za reševanje problema razreza po eni dimenziji. K razvoju metode je pripomogla večja dostopnost in boljša kakovost računalnikov. Računalniki so bili tudi sicer povod za razvoj vedno več metod s tega področja. Metoda je bila predstavljena leta 1971 (Kantorovič & Zalgaller, 1971).

Razrez krogov iz omejene pravokotne ravnine v tem času raziskujejo tudi ostali (Brooks *et al.*, 1940).

Problem minimiziranja neuporabnega ostanka pri razrezu rol papirja, folij, tekstila in ostalega materiala pa kasneje analizira tudi (Eismann, 1958).

Prvo metodo za reševanje enodimenzionalnega problema razreza sta objavila Gilmore in Gomory (Gilmore & Gomory, 1960). Tudi tu gre za problem razreza po eni dimenziji. Problem sta rešila s pomočjo linearnega programiranja. Tri leta kasneje sta metodo dopolnila (Gilmore & Gomory, 1963). Ključno vlogo je imel tudi problem nahrbtnika, ki je bil sestavni del njunih algoritmov. Po dodatnih dveh letih sta problemu dodala več dimenzij (Gilmore & Gomory, 1965b).

Problem nahrbtnika je pogosto sestavni del algoritmov za reševanje problema razreza. Gilmore in Gomory sta metodo za reševanje nahrbtnika objavila še ločeno od problemov razreza (Gilmore & Gomory, 1966). Razvite metode sta uporabila tudi pri reševanju splošnih *ILP* (optimizacijskih) problemov (Gilmore & Gomory, 1965a) in v kombinatorični optimizaciji pri reševanju problema trgovskega potnika (Gilmore & Gomory, 1964).

Zaradi velikega števila spremenljivk pri metodi, ki sta jo uporabila Gilmore in Gomory, se je kasneje objavilo nekatere alternativne metode z manj spremenljivkami (in zato z več omejitvami).

Med prvimi primeri metod z manjšim številom spremenljivk pri problemih razreza so metode Farleya. Na račun zmanjšanega števila spremenljivk je Farley moral vpeljati večje število omejitev. Nekatere izmed teh omejitev so postale znane kot Farleyeve omejitve. Farley rešuje problem s t. i. revidiranimi *simplex* postopki[90], kjer odpravi pogoj o celih številih[91] in elegantno ravna ter upravlja z ostanki pri zaokroževanju (Farley, 1983b; Farley, 1983a; Farley & Richardson, 1984; Farley, 1988b).

Farley je kasneje objavil še nekaj bolj aplikativnih člankov na temo razreza. Primeri se osredotočajo na razrez v tekstilni panogi: razrez oblek (Farley, 1988a) in razrez trpežnih materialov (Farley, 1990).

Metoda Gilmora in Gomoryja je matematično formulirana podobno kot Kantorovičev model. Matematični model je manj kompleksen kot Kantorovičev. Še vedno pa ima veliko spremenljivk. Novost je vpeljava vektorjev, ki so sicer reprezentativni za optimizacijske *ILP*-probleme. Vektorji so nenegativni in cela števila ter razvrščajo naročene palice *i* kot (možni) proizvod od palice na zalogi *j*. Matematični zapis je sledeč (Scheithauer, 2008):

$$a = (a_1, \cdots, a_m)^T \in \mathbb{Z}_+^m$$

[90] *Simplex* postopki so opisani v poglavju Optimizacijski problemi.
[91] S tem transformira *ILP*-problem v *LP*, ki ga lahko rešuje s *simplex* metodo.

Vektor a literatura označuje kot razporeditveni vektor[92], kjer i-ta komponenta a_i pove, kolikokrat se kos i proizvede v razrezu. Od sedanjega zapisa ni mogoče sklepati, od katere palice na zalogi se kos i odreže. Zato je nujna uporaba dodatnega indeksa j, ki označuje, od katere palice na zalogi se kos i proizvede. Dopolnjen vektor je sledeč (Scheithauer, 2008):

$$a^j = (a_{1j}, \cdots, a_{mj})^T \epsilon \mathbb{Z}_+^m, \qquad j \epsilon J,$$

kjer je J število različnih dolžin palic na zalogi.

Metoda Gilmora in Gomoryja vsebuje nekatere identične spremenljivke kot Kantorovičeva metoda. Te so l_i, b_i, L_j, x_{ik} in I.

Na splošno število različnih vzorcev raste eksponentno v odvisnosti od i (število naročil). Izračun vseh možnih vzorcev rezanja postane kmalu neizvedljiv ali vsaj nepraktičen zaradi dolgotrajnega časa računanja. To je značilnost problemov iz množice *NP*-polnih problemov, kamor se problem razreza uvršča (Karp, 1972; Jahromi *et al.*, 2012).

Pri reševanju problema je zato pomembna uporaba metode, ki išče hevristične rešitve. Za eksaktne rešitve ne obstaja (in ne bo nikoli obstajala) nobena metoda, ki bi optimalno rešitev našla v polinomskem času; razen če velja $P = NP$, kar pa je malo verjetno[93].

Pri reševanju problema se uporablja različne pristope. Metoda Gilmora in Gomoryja je ponudila inovativen pristop reševanja z generiranjem dodatnih stolpcev[94]. Ta metoda pri reševanju problema začne reševanje z omejenim številom vzorcev in šele kasneje generira dodatne vzorce, če so ti potrebni. Pri problemih z eno dimenzijo se novi vzorci dodajajo postopoma. Izračunavajo se po dinamični metodi (algoritmu) za reševanje problema nahrbtnika. Pristop omogoča hitro reševanje problema. Rešitve so blizu optimalnim (Gilmore & Gomory, 1960; Gilmore & Gomory, 1963; Gilmore & Gomory, 1965b).

Matematična formulacija kriterijske funkcije je (Gilmore & Gomory, 1960; Gilmore & Gomory, 1963; Scheithauer, 2008):

$$z^{Gilmore\&Gomory} = min \sum_{j \epsilon J} x_j$$

Kriterijska funkcija je identična Kantorovičevi. Pri omejitvah kriterijske funkcije Gilmore & Gomori dodata razporeditveni vektor:

1) $\sum_{j \epsilon J} a_{ij} x_j \geq b_i, \qquad i \epsilon I$

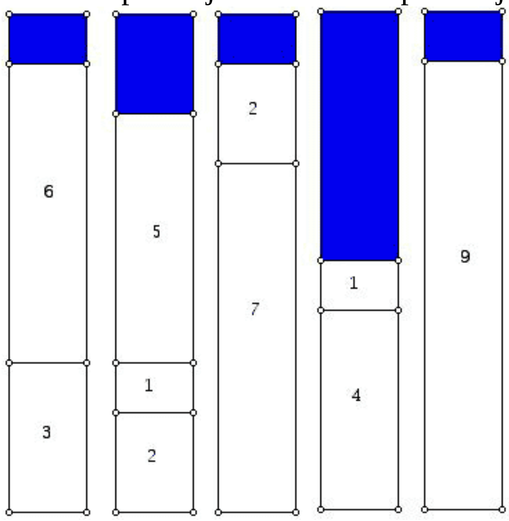
[92] Prevod izraza iz nemške literature. Nem. *Anordnungsvektor*. Izraz vpeljeta in kasneje dosledno uporabljata (Scheithauer & Terno, 1996).
[93] Razlogi za to so našteti pri poglavju: Kompleksnost problemov.
[94] Angl. Column-generation (Gilmore & Gomory, 1960; Gilmore & Gomory, 1963).

2) $x_j \in \mathbb{Z}_+, \qquad j \in J$

Predstavljen zapis ni samo metoda za reševanje enodimenzionalnega problema razreza, temveč je zapis kriterijske funkcije in omejitev; v osnovi ustrezen tudi za opis problema pakiranja v zaboje ,angl. *Bin packing problem*, (Scheithauer, 2008).

Primerjava med problemom razreza in problemom pakiranja v zaboje je prikazana v naslednji sliki. Oba problema sta enodimenzionalna.

Slika 32: Prikaz in primerjava razreza in pakiranja v zaboje



Vir: *American mathematical society, 2013*.

Pri enodimenzionalnem problemu razreza se manjše naročene palice proizvede iz velikih, ki so na zalogi. To se stori tako, da se palice na zalogi po širini razreže na take dolžine, ki ustrezajo naročenim palicam. Manjše palice so na sliki 32 označene s številkami od 1 do 9. Velikih palic je pet. Z modro bravo je označen neuporaben ostanek materiala.

Pri enodimenzionalnem problemu pakiranja v zaboje imamo pet zabojev (pri razrezu so to palice na zalogi). V te zaboje pakiramo manjše predmete, ki po širini popolnoma ustrezajo dimenzijam zaboja. Po dolžini so krajši. Na sliki jih je devet. Vseh devet je potrebno umestiti v zaboje. Plava barva v tem primeru označuje neizkoriščen prostor.

Razlika med enodimenzionalnim problemom razreza in med problemom pakiranja v zaboje je tako v smeri, v katero aktivnost teče. Pri razrezu se iz velikih predmetov proizvede manjše. Pri pakiranju v zaboje pa se iz majhnih predmetov sestavi velike. [95]Pri reševanju teh dveh problemov so si zato metode in algoritmi zelo podobni.

Metode za reševanje problemov razreza se danes uporabljajo v različnih panogah.

V lesni panogi so bili predstavljeni številni problemi razreza. Enodimenzionalni problem razreza v povezavi z razrezom lesa omenja (Holthaus, 2002). Dvodimenzionalna različica problema se najpogosteje omenja v kontekstu z izdelavo pohištva (Venkateswarlu, 2001)

[95] Ali pa se majhne optimalno vstavi v velike.

in (Manrique *et al.*, 2011). Tridimenzionalni problem v tej panogi pa med drugimi opisujeta (Fathi & Kianfar, 2012).

Papirna panoga je posebna zato, ker se pogosto reže role papirja, kar literatura označuje kot problem razreza z giljotino (angl. *Guillotine problem*). Pri tem problemu papir režemo po širini na tak način, da je poraba po dolžini čim manjša (Correia *et al.*, 2012). Problem razreza z giljotino je enodimenzionalni problem razreza. Kadar moramo pri omejeni širini in neomejeni dolžini iskati optimalni razrez za naročene dvodimenzionalne kose papirja različnih dimenzij, imamo opravka s problemom pakiranja v trakovih (po funkcionalnosti je to sicer razrez po trakovih)[96]. Tak primer med drugim opisuje (Ntene & Vuuren, 2009).

Problem razreza z giljotino je prisoten tudi v steklarstvu (Park, Ryu *et al.*, 2013). Primer pakiranja po trakovih je (Park, Kim *et al.*, 2013).

Problem predstavljen v tej disertaciji je iz jeklarske oz. kovinske panoge. V tej panogi se pojavlja problem enodimenzionalnega razreza (Cui *et al.*, 2009; Jin-chun & Pei-zhen, 2012)[97] in dvodimenzionalnega problema razreza (Zheng *et al.*, 2012). Dvodimenzionalni problem razreza v zaporednih časovnih obdobjih, kar danes praviloma pomeni, da morajo biti upoštevani uporabni ostanki, je prikazan v (Silva *et al.*, 2013).

Primer tekstilne panoge je prikazan na primerih (Gradišar *et al.*, 1997; Javanshir *et al.*, 2010).

Razrez poteka tudi v nekaterih novih panogah, kot je nanotehnologija (Wang *et al.*, 2007).

Za probleme pakiranja in razreza se v znanstveni literaturi pojavljajo skupne tipologije, ki različne probleme razvrščajo v ustrezne razrede. Tipologija se po definiciji razlikuje od klasifikacije, saj pri tipologiji ni nujno, da so vsi problemi razvrščeni, kar je sicer nujno pri klasifikaciji. Z uporabo imena tipologija znanstvena srenja za področje pakiranja in razreza posredno priznava, da identifikacija in razvrščanje problemov še nista zaključena. Klasifikacij za področje razreza in pakiranja namreč ni. To je še ena potrditev, da znanstvenoraziskovalno delo na tem področju še ni zaključeno.

Najpomembnejši tipologiji za področje razreza in pakiranja sta (kronološka razvrstitev):

- Tipologija Dyckhoff, 1990;
- Tipologija Wäscher *et al*., 2007.

Wäscherjeva tipologija vključuje več različnih primerov razreza in pakiranja. Kljub temu veliko del po letu 2007 še vedno citira Dyckhoffovo tipologijo, zlasti kadar predstavljajo nov način reševanja problema, ki je že uvrščen v Dyckhoffovi tipologiji; pri primerjavi tipologij ugotavljam, da se včasih omenjeno tipologijo verjetno citira tudi zaradi njene manjše kompleksnosti (Arbiba *et al.*, 2012; Lu *et al.*, 2012; Mobasher & Ekici, 2013).

[96] Angl. *Strip packing problem.*
[97] Metoda reševanja je genetski algoritem.

Tipologija lahko razvršča številne probleme, kot so (Dyckhoff, 1990)[98]:

- problemi razreza,
  problemi minimiziranja neuporabnega ostanka materiala;
- problemi pakiranja v zaboje,
  problemi dualnega pakiranja v zaboje (Vijayakumar *et al.*, 2013),
  pakiranje v trakovih (angl. *strip packing*) (Martello *et al.*, 2003; Özcan *et al.*, 2013),
  vektorsko pakiranje (Shachnai & Tamir, 2012),
  problem nahrbtnika;
- problemi tovorov; različne aplikacije v povezavi s transportom, npr. tovor na paletah, tovor v ladijskih zabojih (Bortfeldt & Wäscher, 2012);
- problemi razporeditev;
- ostali problemi (*e.g.* delovanje multiprocesorjev[99], upravljanje finančnih portfeljev in skladov).

Našteti problemi so splošne oblike problemov. Vsi od naštetih problemov se lahko dalje delijo.

Problemi so razvrščeni hierarhično po več kriterijih in po naslednjem vrstnem redu (Dyckhoff, 1990):

1. Dimenzionalnost problema.
   1) Enodimenzionalni.
   2) Dvodimenzionalni.
   3) Tridimenzionalni.
   N) *N*-dimenzionalni (*N* je številka, $N > 3$).
2. Način uporabe materiala[100].
   B) Vsi objekti in nabor malih predmetov.
   V) Nabor objektov in vsi mali predmeti.
3. Nabor večjih objektov.
   O) En sam objekt.
   I) Identični objekti.
   D) Različni objekti.
4. Nabor manjših predmetov.
   F) Manjše število predmetov različnih velikosti.

[98] Pri primerih, ki še niso opisani, prilagam nekaj primerov iz literature.
[99] Angl. Multiprocessor scheduling problems. (Rudek *et al.*, 2013)
[100] Dyckhoff asortiment večjega materiala na eni strani imenuje z besedo objekti (angl.*Objects*), medtem ko za drugo stran uporablja besedo predmeti (angl. *Items*) (Dyckhoff, 1990).

M) Večje število predmetov, več različnih velikostih redov.
R) Večje število predmetov, manjše število različnih velikostnih redov.
C) Predmeti enakega velikostnega reda.

Klasični enodimenzionalni problem razreza je po tej tipologiji klasificiran kot 1/V/I/R. Enodimenzionalni problem pakiranja v zaboje pa 1/V/I/M. Problema sta si tudi v tej razvrstitvi blizu, razlika med njima je v številu predmetov različnih dolžin (Dyckhoff, 1990).

Tipologija ima z današnjega vidika nekaj pomanjkljivosti:

- Nekatere probleme je možno uvrstiti v več različnih razredov (Dyckhoff, 1990).
    - Primer: problem pakiranja tovorov in obremenitve vozil (angl. *Vehicle loading problem*[101]), ki je lahko uvrščen v dva razreda (1/V/I/F in 1/V/I/M).
- Nekatere različne probleme se uvršča v isti razred[102].
    - Primer 1: avtorji (Gradišar *et al.*, 2002) opozorijo na nekorektnost pri nekaterih primerih enodimenzionalnega razreza, ki se jih rešuje z uporabo različnih metod. Nekorektnost zadeva primere, katerih skupna lastnost je, da naročilo zahteva veliko število kosov z malo različnimi dolžinami. Razlika nastopi pri materialu na zalogi, ki ga je v obeh primerih dovolj za procesiranje naročil. V enem primeru imamo na zalogi palice z malo različnimi dolžinami, v drugem primeru pa so vse dolžine palic različne. Po Dyckhoffovi tipologiji sta oba problema uvrščena v razred 1/V/D/R, kar pa ni korektno, ker se problema rešuje na dva različna načina. V prvem primeru se za reševanje problema uporablja *t. i. pattern oriented approach*, v drugem primeru pa *t. i. item oriented approach.* Avtorji (*Wäscher et al.*, 2007) k temu dodajajo, da enako velja za probleme razreza in pakiranja z več dimenzijami. Nadalje ugotavljajo, da je potrebno tretji Dyckhoffov pogoj nadalje razdeliti.
    - Primer 2: z vidika razreza se v isti razred uvrščata klasični oz. statični enodimenzionalni problem razreza in enodimenzionalni problem razreza v zaporednih časovnih obdobjih. To sta odpravila (Trkman & Gradišar, 2007) z razširitvijo tipologije, kamor sta vpeljala še časovno razsežnost.
- Nekatere probleme je v tipologijo sicer mogoče uvrstiti, vendar je za mnoge probleme taka razvrstitev preveč površinska:
    - Problem razreza z vračanjem ostanka na zalogo. Angl. *Cutting stock problem with usable leftover* (*CSPUL*) (Cui & Yang, 2010; Gradišar *et al.*,

[101] Gl. (Ren, 2013).
[102] Za ostale primere gl. (Wäscher *et al.*, 2007).

2011; Cherri *et al.*, 2012).[103] Problem ima časovno komponento (če časovne dimenzije ni, je problem uvrščen v 1/V/D/M). Poleg tega problem ni samo v razrezu, temveč tudi v ravnanju in upravljanju z zalogo (Gradišar & Tomat, 2013).

- Problem razreza po skupinah.[104] Pri problemu nastopa tako razrez posameznih naročenih palic kot njihovo pakiranje v skupine.

Wäscher, Haußner in Schumann leta 2007 predstavijo novejšo tipologijo, ki zajema več problemov. Avtorji trdijo, da je tipologija najbolj primerna za razvrstitev problemov, ki se v literaturi pojavljajo med letoma 1995 in 2004, kar pa ne izključuje uporabe tipologije tudi za druga dela, ki so objavljena izven tega časovnega intervala (Wäscher *et al.*, 2007).

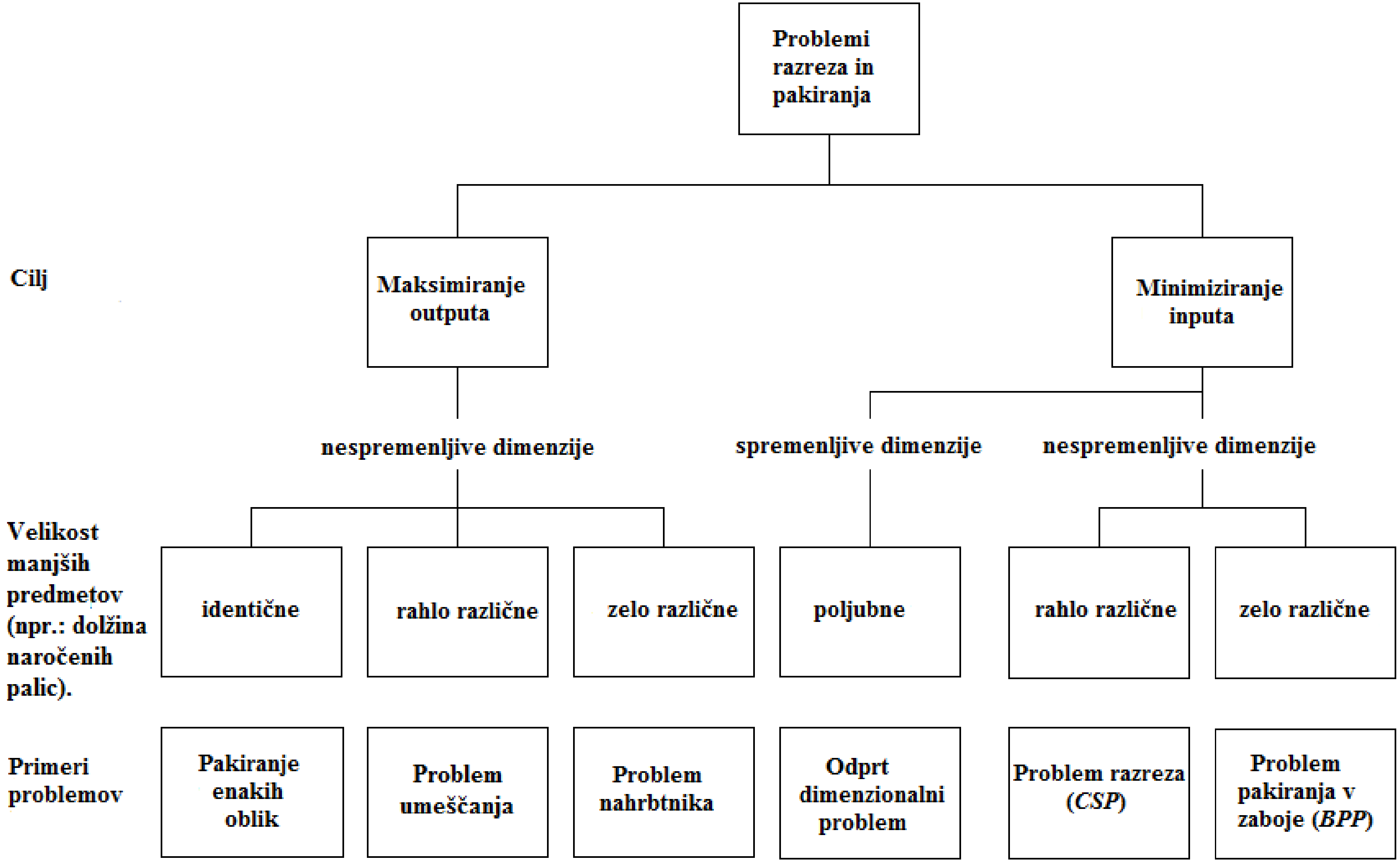
Tipologija (Wäscher *et al.*, 2007) se sooča z razvrščanjem istih problemov, pri čemer so upoštevani številni dodatni problemi, ki jih je Dyckhoffova tipologija pomanjkljivo razvrščala. Članek, v katerem tipologijo predstavijo, nam daje tudi izvrsten pregled literature za področje razreza in pakiranja do leta 2005.

Osnovne kategorije problemov so definirane po (gl. sliko 33):

- cilju (minimiziranje vhodnega materiala ali maksimiranje izhodnega materiala):
  - maksimiranje outputa (večinoma problemi pakiranja),
  - minimiziranje inputa (sem se uvršča tudi razrez materiala);
- spremenljivosti dimenzij (fiksna ali spremenljiva):
  - pri razrezu se ne spreminjajo (niso spremenljivka);
- številu različnih velikosti pri manjših predmetih:
  - pri razrezu so načeloma rahlo različne, razen pri CSPUL, ko se število različnih velikosti pri zalogi poveča.

[103] Več o teh problemih sledi v nadaljevanju.
[104] Matematična formulacija problema in metoda reševanja bo predstavljena v nadaljevanju.

Slika 33: Različni tipi problemov razreza in pakiranja



Vir: *Wäscher et al., 2007 (prirejeno)*

Pri razdelitvi vseh problemov razreza in pakiranja se ob upoštevanju zgornjih razlik (Wäscher *et al*., 2007) pridobi šest osnovnih skupin problemov.

Pakiranje enakih oblik (pakiranje mnogokotnikov) oz. konkretno odprt dimenzionalni problem in problem nahrbtnika so bili opisani v sklopu pakiranja. Problem umeščanja[105] se lahko smatra kot poseben primer pakiranja mnogokotnikov, kjer so ti lahko različnih velikosti. Osnovna problema razreza in pakiranja v zaboje v eni dimenziji sta bila opisana v tem poglavju.

Tipologija razvršča probleme v dve tabeli, ki sta odvisni od cilja (ena tabela je namenjena problemom za maksimiranje izhodnega materiala in druga za minimiziranje vhodnega materiala)[106].

Slika 34: Razvrstitev problemov v razrede (cilj je maksimiranje outputa)

Značilnosti velikih objektov \ Nabor malih predmetov		Identični	Rahlo različni	Zelo različni
Vse dimenzije fiksne	**En velik objekt**	**Problem pakiranja enakih predmetov (angl.** ***Identical Item Packing Problem)*** IIPP	**Problem umestitve pri enem velikem objektu (angl.** ***Single Large Object Placement Problem)*** SLOPP	**Enojen problem nahrbtnika (anlg.** ***Single Knapsack Problem*****)** SKP
	Identični		**Problem umestitve pri več enakih velikih objektih (angl.** ***Multiple Identical Large Object Placement Problem*****)** MILOPP	**Večkratni problem enakih nahrbtnikov (angl.** ***Multiple Identical Knapsack Problem*****)** MIKP
	Heterogeni		**Problem umestitve pri več različnih velikih objektih (angl.** ***Multiple Heterogeneous Large Object Placement Problem*****)** MHLOPP	**Problem več različnih nahrbtnikov (angl.** ***Multiple Heterogeneous Knapsack Problem)*** MHKP

Vir: Wäscher *et al*., 2007.

Za razvrščanje problemov razreza in pakiranja po funkciji maksimiranja izhodnega materiala ponuja tipologija sedem različnih razredov (*IIPP, SLOPP, MILOPP, MHLOPP, SKP, MIKP IN MHKP).*

Razvrstitev problemov je prikazana v priloženi tabeli (Wäscher *et al*., 2007).

---

[105] Angl. *Placement problem* (Chung *et al*., 2013).

[106] Gl. sliko 34 in 35.

Za razvrščanje problemov razreza in pakiranja po funkciji minimiziranja vhodnega materiala tipologija definira sedem različnih razredov (*SSSCSP*, *MSSCSP*, *RCSP*, *SBSBPP*, *MBSBPP*, *RBPP* in *ODP).* Razvrstitev problemov je prikazana v priloženi tabeli (Wäscher *et al*., 2007).

Slika 35: Razvrstitev problemov v razrede (cilj je minimiziranje inputa)

<table>
<tr><th colspan="2">Nabor malih predmetov
Značilnosti velikih objektov</th><th>Rahlo različni</th><th>Zelo različni</th></tr>
<tr><td rowspan="3">Fiksne dimenzije</td><td>Identični</td><td>Problem razreza objektov enakih velikosti (angl. Single Stock Size Cutting Stock Problem)

SSSCSP</td><td>Problem pakiranja v zaboje enakih velikosti (angl. Single Bin Size Bin Packing Problem)

SBSBPP</td></tr>
<tr><td>Rahlo različni</td><td>Problem razreza objektov različnih velikostnih razredov (angl. Single Stock Size Cutting Stock Problem)

MSSCSP</td><td>Problem pakiranja v zaboje različnih velikostnih razredov (angl. Multiple Bin Size Bin Packing Problem)

MBSBPP</td></tr>
<tr><td>Zelo različni</td><td>Problem razreza objektov različnih velikosti (angl. Residual Cutting Stock Problem)

RCSP</td><td>Problem pakiranja v zaboje različnih velikosti (angl. Residual Bin Packing Problem)

RBPP</td></tr>
<tr><td colspan="2">En velik objekt s spremenljivo dimenzijo</td><td colspan="2">Odprt dimenzionalni problem
(angl. Open Dimension Problem)

ODP</td></tr>
</table>

Vir: Wäscher *et al*., 2007.

Druga tabela razvršča probleme razreza. Pri razvrščanju problemov ni več kriterija za število dimenzij, kar je razlika v primerjavi z Dyckhoffovo tipologijo. Pomemben faktor v povezavi z dimenzijami je informacija, ki pove, ali so dimenzije določene ali spremenljive. V primeru spremenljive dimenzije imamo opravka z odprtim dimenzionalnim problemom, pri katerem nastopajo tako problemi razreza kot pakiranja[107] v dveh ali več dimenzijah.

Naslednje dva kriterija se osredotočata na značilnosti velikih objektov in malih predmetov. Ločnica med objekti in predmeti se je obdržala iz Dyckhoffove tipologije. Objekti so lahko

[107] Problem je opisan v sklopu pakiranja.

identični, rahlo različni in zelo različni. Predmeti pa so lahko rahlo in zelo različni, in sicer po velikosti[108].

Podrobneje bom opisal področje razreza, ki je razdeljen v razrede, ki so po tipologiji označeni kot *SSSCSP*, *MSSCSP* in *RCSP*. Ostali problemi v drugih razredih so že bila opisani, za več informacij pa za izhodišče priporočam literaturo, ki jo navajajo (Wäscher et al., 2007).

Prva izmed sedmih možnih razvrstitev vključuje probleme razreza objektov enakih velikosti (*SSSCSP*). Sem se uvrščajo enodimenzionalni problemi razreza, kot sta (Kantorovič, 1939) in (Gilmore & Gomory, 1963). Uniformnost dolžin objektov je mogoče opaziti tudi iz matematične formulacije omenjenih primerov. V razred *SSSCSP* spadajo tudi problemi dvodimenzionalnega problema razreza, kot je (Gilmore & Gomory, 1965b). Problemi v treh dimenzijah obsegajo zlaganje predmetov na palete ali na kontejnerje. V zadnjem času so pomembnejše objave iz tega področja naslednje (Gonçalves & Resende, 2012), (Junqueira *et al.*, 2012) in (Zhu *et al.*, 2012).

Druga razvrstitev je razširitev prej opisanih problemov na primere, pri katerih je na razpolago več različnih velikosti objektov (*MSSCSP*). Pri enodimenzionalnem problemu razreza je tak primer (Belov & Scheithauer, 2002). Dvodimenzionalni primer, ki ga dodajam kot referenco, je opisan na primeru izdelave pohištva (gl. Carnieri *et al.*, 1994). Tridimenzionalni primer (Wäscher *et al.*, 2007) najdejo v naslednji objavi, ki obravnava pakiranje predmetov v kontejnerje (Eley, 2003).

Tretji razred vključuje probleme razreza z zelo heterogeno sestavo velikih objektov (*RCSP*). Taka sestava na strani zaloge je praviloma posledica razreza, kjer se uporabne ostanke (angl. *usable leftovers*) vrača nazaj na zalogo. Te ostanke se v idealnih okoliščinah ponovno uporabi pri naslednjih naročilih. Na problem so prvi opozorili (Gradišar *et al.*, 1997; Gradišar *et al.*, 1999; Gradišar *et al.*, 2002; Gradišar & Trkman, 2005). Problem je nato postal znan pod kratico *CSPUL* (angl. *Cutting stock problem with usable leftovers*) (Cherri *et al.*, 2009; Cui & Yang, 2010; Cherri *et al.*, 2011; Gradišar *et al.*, 2011; Ravelo *et al.*, 2011). Med dvodimenzionalnimi primeri, ki se uvrščajo v ta razred (Wäscher *et al.*, 2007) omenjajo (Vanderbeck, 2000). Bolj aktualen in skladen s teorijo o uporabnih ostankih pa je (Silva *et al.*, 2013).

Področje *CSPUL* je sedaj eno izmed bolj aktualnih tem med problemi razreza. Poleg Slovenije, kjer se je raziskovanje začelo, je pomembno upoštevati še dela iz Brazilije, kjer je več člankov na to temo tudi v portugalskem jeziku[109]. Problem v portugalščini imenujejo *problema de corte de estoque com sobras aproveitáveis (de material)* (Cherri, 2009;

[108] Objekti in predmeti so pri eni-dimenzionalnih problemih različni po dolžini.

[109] Poleg raznih magistrskih nalog (*e.g.* Heis, 2007; Alem-Junior, 2007: mentor je dr. Marcos Nereu Arenales) in doktoratov na temo razreza (*e.g.* Limeira, 2005: mentor je dr. Horácio Hideki Yanasse; Cherri, 2009: mentor je dr. Marcos Nereu Arenales).

Ravelo *et al.*, 2011). V Braziliji vlada veliko povpraševanje po metodah za razrez in prihaja iz industrije, npr. proizvodnja letal[110] (Arenales, 2012a)[111].

Matematični model za *CSPUL*, kot je bil najprej predstavljen (Gradišar et al., 1997) in ki je postal referenca ostalim (Ravelo *et al.*, 2011):

m	→	število palic na zalogi;
d_j	→	dolžina palice na zalogi j ($1 \leq j \leq m$);
n	→	število naročenih palic;
s_i	→	dolžina naročene palice i ($1 \leq i \leq n$);
b_i	→	število kosov naročene palice i;
UB	→	zgornja meja oz. minimalna dolžina, ki je še uporaben ostanek (angl. *Upper bound*);
Y, M	→	konstante, ki določajo maksimalno število naročenih kosov, ki se jih lahko odreže iz ene palice na zalogi.

Spremenljivke:

x_{ij}	→	število naročenih palic i, ki se jih odreže iz palice na zalogi j;
δ_j	→	ostanek materiala po palici j;
Δ_i	→	neproizvedena naročena palica i;[112]
t_j	→	neuporaben ostanek materiala pri palici j;
y_{ij}	→	pokaže, da je kos i odrezan od palice j;
z_j	→	pokaže, da je palica j zajeta v načrt razreza.

Model:

$$\min \sum_{i=1}^{n} \Delta_i$$

Cilj je čim večja izpolnitev naročila.

$$\min \sum_{j=1}^{m} t_i$$

Cilj je čim manjša izguba materiala, ki ga ni več mogoče ponovno uporabiti.

$$\min \sum_{j=1}^{m} r_i$$

[110] Vodilna družba tu je Embraer.
[111] Pogovor s prof. Arenalesom po konferenci *Conference on cutting & packing problems.*
[112] Δ_i se lahko v modelu tudi izpusti (Ravelo et al., 2011).

Cilj je izpolniti čim večji del naročila pri čim manjši izgubi. Pri tem so omejitve naslednje:

$$\sum_{i=1}^{n} s_i x_{ij} + \delta_j = d_j \qquad \text{(Omejitve nahrbtnika).}$$

Omejitve nahrbtnika garantirajo, da je vsota dolžine odrezanih kosov (naročenih) palic manjša od dolžine palice *j* na zalogi.

$$\sum_{j=1}^{m} x_{ij} + \Delta_i = b_i, \;\; \forall i \;\; \text{(Omejitve naročila).}$$

Omejitve naročila (angl. *Demand constraints*) določajo, da število palic *i* ne preseže števila naročenih palic *i*.

(Gradišar et al., 1997) uporablja še naslednjo omejitev, ki pa se jo pri matematičnih formulacijah za *CSPUL* izpušča.

$$\sum_{i=1}^{n} y_{ij} \leq Y \leq M$$

Maksimalno število naročenih palic, ki se jih lahko pridobi iz palice na zalogi.

Z omejitvijo:

$$y_{ij} = \begin{cases} 0, \text{ v primeru, ko je } x_{ij} = 0 \; \delta_j \geq \text{UB} \\ 1, \text{ sicer.} \end{cases} \qquad \forall i, j$$

Omejitvam so dodane še naslednje:

$$t_j = \begin{cases} \delta_j, \text{ v primeru, ko je } \delta_j \leq \mathrm{d_j} \text{ in } \delta_j < \text{UB} \\ 0, \text{ sicer} \end{cases} \qquad \forall j$$

$$r_j = \begin{cases} 0, \text{ v primeru, ko je } \delta_j \leq \mathrm{d_j} \text{ in } \delta_j \geq \text{UB} \\ 1, \text{ sicer} \end{cases} \qquad \forall j$$

$$z_j = \begin{cases} 0, \text{ v primeru, ko je } \sum_{i=1}^{n}(x_{ij}) = 0 \\ 1, \text{ sicer} \end{cases} \qquad \forall j$$

Zadnjo omejitev (Ravelo et al., 2011) pri *CSPUL* izpušča.

Cela števila: $x_{ij} \geq 0$,

$\delta_{ij} \geq 0$,

$t_j \geq 0$,

$\Delta_i \geq 0$,

$r_j, z_j \in \{0,1\}$,

$1 \leq i \leq n$,

$1 \leq j \leq m$.

Pomanjkljivost *CSPUL*-metod reševanja je v učinkovitem upravljanju in ravnanju z zalogo, kadar je dovoljeno neomejeno vračanje uporabnih ostankov (prej so metode dovoljevale le omejeno vračanje). Testiranje pri neomejenem vračanju uporabnih ostankov ni bilo opravljeno za daljše časovno obdobje do raziskav, ki sta jih opravila za več sto iteracij (Gradišar & Tomat, 2012)[113]. Do takrat se je uporabne ostanke, ki so že bili uvrščeni na zalogo, zavrglo, če niso bili uporabljeni v naslednjem naročilu (Cherri et al., 2009).

(Gradišar & Tomat, 2012) z obsežno analizo vračanja ostankov na zalogo ugotavljata, da le-ti na zalogi naraščajo do določenega praga, kjer se njihovo število ustali - to se običajno zgodi po 20-60 ponovitvah[114] (Gradišar & Tomat, 2013). Število uporabnih ostankov na zalogi je odvisno od razmerja med povprečnimi dolžinami palic *i* in *j* (med povprečno dolžino palice na strani naročila in med povprečno dolžino palice na zalogi). Z daljšimi dolžinami pri naročilih *ceteris paribus* je kopičenje uporabnih ostankov na zalogi večje. S temi raziskavami avtorja pokažeta, da je število uporabnih ostankov pri izpolnitvi enega naročila stohastičen proces, ki pa se po več ponovitvah da predvidevati in kontrolirati.

Za učinkovito ravnanje in upravljanje s številom neuporabnih ostankov na zalogi predlagata dinamično prilagajanje *UB* pri zaporednih obdobjih razreza naročil (Gradišar & Tomat, 2013).

5 MATEMATIČNI MODEL PROBLEMA RAZREZA PO SKUPINAH

V praksi imajo podjetja opravka s specifičnimi problemi, kjer ustaljene metode niso uporabne, zato jih je potrebno najprej prilagoditi ali pa razviti nove. Kljub dokaj jasni definiciji problema enodimenzionalnega razreza v poslovnem svetu obstaja veliko število raznovrstnih primerov. Poleg zmanjšanja izgube neuporabnega materiala so cilji lahko tudi nižji stroški, krajši čas razreza, nižje število menjav ali nastavitev rezila, zmanjšanje zaloge, prilagoditev razreza za potrebe logistike in podobno (Trkman & Gradišar, 2003; Cesar *et al.*, 2011).

[113] Predstavitev na konferenci.
[114] V nekaterih primerih je lahko ta meja še bistveno višja.

Poseben izziv predstavljajo nekateri obsežnejši primeri naročil, ki jih sestavlja večje število kosov. V literaturi meja, ki loči manj in bolj obsežna naročila, ni jasno določena. Poleg števila kosov določajo velikost naročila tudi dimenzije, oblika profila, teža materiala, logistične in tehnološke omejitve, ki izhajajo iz specifičnih pogojev v praksi. Izhodiščni problem je ta, da materiala iz skladišča za celotno naročilo ni možno na enkrat prepeljati do stroja za rezanje. Tudi prostor za odlaganje materiala ob stroju na eni strani in narezanih kosov na drugi je praviloma omejen. Poleg tega je narezane kose potrebno odlagati tako, da je čim lažje kasnejše jemanje le-teh iz kupa oziroma sklada v vrstnem redu, ki ga zahtevajo nadaljnji tehnološki postopki in ki je praviloma različen od vrstnega reda rezanja, ki ga določa algoritem za minimizacijo ostanka (Cesar *et al.*, 2011).

V literaturi še ni zaslediti niti splošnih metod za optimizacijo razreza pri velikih naročilih in po skupinah oz. po podnaročilih, niti rešitve dejanskih praktičnih primerov. V nadaljevanju je sicer opisan razvoj metode, ki je prilagojena potrebam konkretnega podjetja, vendar pa je sorazmerno malo specifičnih omejitev. Zato se lahko sklepa, da bo predlagana metoda lahko služila kot vzorec rešitve tudi drugim podjetjem, ki se srečujejo s problemom velikih naročil. (Cesar *et al.*, 2011)

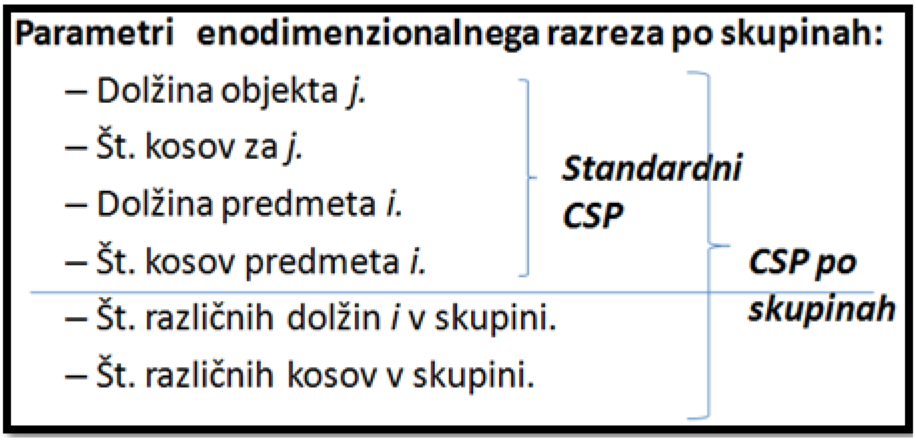
Predlagana metoda opisuje razdelitev velikega naročila v več manjših delov, skupin (ali podnaročil) naročenih dolžin tako, da bo skupna izguba materiala vseh skupin čim manjša. (Cesar *et al.*, 2011)

Opis problema je naslednji. Na zalogi imamo zadostno število kosov enodimenzionalnega materiala – palic, da izpolnimo naročilo (objektov po tipologiji Wäscher et al., 2007). Dolžina posamezne palice je v splošnem različna in izražena s celimi števili (problem se uvršča med optimizacijske *ILP* probleme). Palice so lahko enake ali različne. Različne so zaradi tega, ker proizvajalec izdeluje več različnih standardnih dolžin, kjer so pomembne razlike med deklariranimi standardnimi dolžinami in dejansko izmerjenimi in ker obstajajo tudi nestandardne dolžine, ki so lahko dovolj veliki oziroma še uporabni ostanki prejšnjih naročil (problemi tipa *CSPUL*). (Cesar *et al.*, 2011)

Material iz zaloge uporabimo za izpolnitev naročila, ki ga sestavljajo krajše dolžine s točno določenim številom kosov (predmeti po tipologiji: Wäscher *et al.*, 2007). Zaradi obsežnosti, naročilo razdelimo na *r* manjših skupin naročenih dolžin. *r* ni konstanta, saj morata biti tako velikost kot sestava posamezne skupine v skladu z omejitvami. Gre za obraten problem, kot pri združevanju naročil, ki morajo biti na primer izpolnjena do določenega datuma (Li, 1996) in podoben kot pri izpolnjevanju naročil v zaporednih časovnih intervalih (Trkman & Gradišar, 2007), le da se v tem preučevanem primeru zaloga materiala med izpolnjevanjem naročila ne spreminja. Ostanek, ki je dovolj dolg, da ga je možno uporabiti pri izpolnjevanju bodočih naročil, se vrne v skladišče. (Gradišar *et al.*, 1999; Arianna Alfieri *et al.*, 2004; Cherri *et al.*, 2009; Gradišar *et al.*, 2011; Silva *et al.*, 2013). Torej gre za tip problema *CSPUL*. Ostanki krajši od določenega praga *D* pa predstavljajo izgubo. Naročilo izpolnimo tako, da minimiziramo skupno izgubo vseh skupin. (Cesar *et al.*, 2011)

Parametre enodimenzionalnega razreza po skupinah prikazujem v sliki 36, v kateri je prikazana razlika med standardnim problemom razreza in problemom razreza po skupinah.

Slika 36: Razlika med standardnim enodimenzionalnim (1D) problemom razreza in 1D problemom razreza po skupinah glede na vhodne parametre



Vir: lastna skica.

Kriterijsko funkcijo in omejitve so sicer oblikovane v skladu s potrebami konkretnega podjetja, ki se ukvarja z izdelavo stebrov za visoko napetostne električne vode. Vendar pa je večina omejitev precej splošnih in je opisan problem najbrž podoben kot ga imajo tudi druga podjetja, ki se srečujejo z velikimi naročili (Cesar *et al*., 2011).

Po tipologiji iz 1990 je problem v razredu *1/V/D/M*. Po tipologiji iz 2007 pa je problem v razredu *MSSCSP*[115], medtem ko je oblikovanje skupin lahko uvrščeno tudi v *MIKP* (problem nahrbtnika, več nahrbtnikov enakih velikosti).

Potrebno je minimizirati izgubo materiala celotnega naročila tako, da (Cesar *et al*., 2011)

1. se posamezna naročena dolžina nahaja samo v eni skupini, ker je rokovanje z narezanimi kosi ob stroju za rezanje tako mnogo lažje;

2. se lahko posamezna palica v skladišču uporabi samo v eni skupini, ker je rokovanje z ne do konca razrezanimi palicami tako mnogo lažje;

3. je v posamezni skupini največ *P* naročenih dolžin, kar olajšuje rokovanje z narezanimi kosi ob stroju za rezanje in tudi izbiranje palic, ki gredo v nadaljnji tehnološki postopek;

4. se lahko iz posamezne palice v skladišču reže največ *N* različnih naročenih dolžin, ker s tem omejimo število nastavitev dolžine rezanja na stroju in olajšamo rokovanje z delno razrezanimi palicami iz skladišča;

5. je velikost skupine omejena z *M* - največjo dovoljeno vsoto dolžin naročenih kosov v skupini.

[115] Z upoštevanjem vračanja več uporabnih ostankov v zalogo bi bil problem uvrščen v razred *RCSP*.

Opisani pogoji olajšujejo prevoz palic iz skladišča do stroja za rezanje, tako da se ena skupina prepelje na enkrat in olajšuje rokovanje s palicami ob stroju za rezanje.

Problem razreza je definiran (Cesar *et al*., 2011):

$l_i =$ dolžina naročene palice; $i = 1,...,n$

$b_i =$ zahtevana količina palic dolžine l_i

$L_j =$ dolžina palice na zalogi; $j = 1,...,m$

$x_{ij} =$ število naročenih kosov dolžine l_i , ki so odrezani iz L_j

$\partial_j =$ ostanek pri razrezu palice L_j

Kriterijska funkcija:

$$min \sum_{k=1}^{r} \sum_{j=1}^{m} t_{kj} g_{kj} \quad \text{(minimiziranje izgube celotnega naročila)}$$

z ozirom na:

1) $$\sum_{i=1}^{n} l_i b_i h_{ki} \leq M \quad \forall k \quad \text{(največja vsota dolžin vseh naročil v skupini)}$$

2) $$\sum_{k=1}^{r} g_{kj} \leq 1 \quad \forall j \quad \text{(vsaka palica } j \text{ se lahko uporabi le v eni skupini)}$$

3) $$\sum_{k=1}^{r} h_{ki} \leq 1 \quad \forall i \text{ (vsaka posamezna dolžina } i \text{ je lahko samo v eni skupini)}$$

4) $$\sum_{i=1}^{n} h_{ki} \leq P \quad \forall k \quad \text{(največje število različnih naročenih dolžin v skupini)}$$

5) $$\sum_{i=1}^{n} y_{ij} \leq N \quad \forall j \text{ (z ene palice } j \text{ lahko odrežemo le } N \text{ različnih palic } i\text{)}$$

6) $$\sum_{i=1}^{n} l_i x_{ij} + \partial_j = L_j \quad \forall j \quad \text{(omejitev nahrbtnika)}$$

7) $\sum_{j=1}^{rm} x_{ij} = b_i \quad \forall i$ (naročene dolžine so proizvedene v celoti)

8) $\sum_{j=1}^{m} z_j . u_{kj} \leq 1 \quad \forall k$ (samo en ostanek v skupini k je lahko daljši od $(l_i \cdot h_{ki})$

9) $UB_k = \max\,(l_i \cdot h_{ki}) \qquad \forall\, k$

$x_{ij} \geq 0$, celo število $\qquad \forall\, i, j$

$t_{kj} \geq 0 \qquad \forall\, j$

$\partial_j \geq 0 \qquad \forall\, j.$

V navedenem modelu so uporabljene naslednje funkcije:

$$z_j = \begin{cases} 0 \text{ v primeru, ko } x_{ij} = 0 \quad \forall\, i \\ 1 \text{ sicer} \end{cases}$$

kaže, če je palica L_j uporabljena v načrtu razreza,

$$g_{kj} = \begin{cases} 1 \text{ v primeru, ko je } L_j \text{ uporabljen v skupini } k \\ 0 \text{ sicer} \end{cases}$$

kaže, če je palica L_j uporabljena v skupini k,

$$h_{ki} = \begin{cases} 1 \text{ v primeru, ko je } l_i \text{ v skupini } k \\ 0 \text{ sicer} \end{cases}$$

kaže, če je naročilo l_i v skupini k,

$$u_{kj} = \begin{cases} 1 \text{ v primeru, ko } g_{kj} = 1 \wedge \partial_j > UB_k \\ 0 \text{ sicer} \end{cases}$$

kaže, če je ostanek palice L_j, uporabljene v skupini k, večji od UB_k,

$$t_{kj} = \begin{cases} \partial_j \text{ v primeru, ko } g_{kj} = 1 \wedge \partial_j \leq UB_k \\ 0 \text{ sicer} \end{cases}$$

predstavlja ostanek palice L_j v skupini k,

$$y_{ij} = \begin{cases} 0 \text{ v primeru, ko } x_{ij} = 0 \\ 1 \text{ sicer} \end{cases}$$

kaže, če se naročilo l_i reže iz palice L_j.

V vsaki posamezni skupini je lahko le en ostanek daljši od *max* ($l_i \cdot h_{ki}$) (8). Ostanki v skupini k, ki so daljši od *max* ($l_i \cdot h_{ki}$), ne štejejo kot izguba, ampak kot uporabni ostanek. Če bi bila zgornja meja dolžine ostankov v posamezni skupini UB_k, ki jih smatramo kot izgubo, ker so prekratki, da bi jih lahko ponovno uporabili, postavljena nižje od *max* ($l_i \cdot h_{ki}$), bi bila posledica naslednja situacija. Ob dovolj veliki zalogi bi algoritem generiral čim več ostankov, ki so manjši od *max* ($l_i \cdot h_{ki}$) in večji od UB_k, ker ne bi šteli kot izguba. Na zalogi bi se tako nabiralo vedno večje število krajših kosov, ki bi povzročali večji ostanek pri bodočih naročilih (Gradišar & Tomat, 2013). To bi se zgodilo tudi, če bi dovolili več kot en ostanek po skupini, daljši od *max* ($l_i \cdot h_{ki}$). Ker to ni zaželeno, se nastavi UB_k na *max* ($l_i \cdot h_{ki}$). Po izvedeni optimizaciji pa se lahko poljubno določi mejo D, ki ločuje izgubo od še uporabnih ostankov, ki se jih vrne v skladišče. (Cesar *et al*., 2011)

6 METODA REŠEVANJA

Skupine je v splošnem možno tvoriti na dva načina. Lahko se optimizira naročilo kot celoto, rezultate pa se potem razdeli v manjše skupine. V tem primeru posebna metoda za optimizacijo razreza ni potrebna, ker se skupine oblikuje, ko je načrt razreza že izdelan. Lahko pa se najprej oblikuje skupine in se šele nato optimizira razrez. Če se posluži prvega načina, v splošnem ni možno zadovoljiti omejitve (3). Ker se iz posamezne palice v skladišču lahko odreže kose katerih koli naročenih dolžin, grupiranje palic, ki vsebujejo samo določena naročila, ne bi bilo možno izvesti. Potrebno je torej razviti novo metodo, ki bo omogočala obraten postopek, najprej oblikovanje ustreznih skupin in nato minimizacijo ostanka. Bistvena za obstoj problema optimizacije razreza po skupinah je torej omejitev (3). Od splošne definicije *CSPUL*, katere matematična formulacija je bila že prikazana, se pričujoča definicija razlikuje le po tem, da ima poleg omejitve velikosti skupine (1) ali (4) samo dve dodatni omejitvi: (3) in (2). Omejitev (2) je med manj pomembnimi, lahko se jo odpravi pa to ne bi pomembno vplivalo na predlagano metodo reševanja problema. Gre za to, da uporabni ostanki prejšnjih skupin niso na voljo naslednjim skupinam istega naročila ampak se po izpolnitvi naročila vrnejo v skladišče in so na voljo šele pri naslednjih naročilih. V dani praktični situaciji se je takšno obravnavanje uporabnih ostankov izkazalo kot najbolj ustrezno. V kakšnem drugem podjetju pa omejitev (2) morda niti ne bi bila potrebna. (Cesar *et al*., 2011)

Predlagana hevristična metoda ima dva dela. V prvem delu se celotno naročilo razdeli v skupine. V drugem delu se minimizira ostanke posameznih skupin.

Delitev večjega naročila na manjše dele je možno izvesti na mnogo različnih načinov. Izbran je tisti, ki je primernejši za reševanje naročil, ki se jih izpolnjuje z velikim številom palic iz skladišča. To se praviloma zgodi v primerih z majhnim razmerjem med povprečno dolžino palice v skladišču in povprečno dolžino naročila. To razmerje je določeno kot majhno, če je na primer med 1 in 3. V teh primerih je število palic iz skladišča, ki jih potrebujemo za izpolnitev naročila, zelo veliko oziroma le malo manjše, kot je kosov naročil. V nasprotnem primeru, ko je to razmerje večje, je praviloma možno naročilo izpolniti že z manjšim številom palic iz skladišča. S tem pa se v splošnem tudi zmanjša potreba po delitvi naročila na manj obsežne in lažje obvladljive dele. Pri oblikovanju skupin se torej domneva, da je večina praktičnih potreb po razdelitvi naročila na manjše dele povezana s problemi, pri katerih se iz ene palice v skladišču odreže kose le enega ali najpogosteje dveh različnih naročil, več pa le izjemoma. Takšno je stanje tudi v obravnavanem podjetju. Zato se je razvoj nove metode prilagodilo majhnim razmerjem med povprečno dolžino palic v skladišču in dolžino naročil. V praktičnih primerih, kjer je to razmerje večje od 3, zato predlagane metode ne bo možno uporabiti brez večjih prilagoditev. Vendar takšnih primerov v praksi ni veliko. (Cesar *et al.*, 2011)

Naročilo se razdeli v skupine v dveh stopnjah. V prvi se iz naročil tvori pare, ki predstavljajo najmanjše možne skupine. Pari služijo kot vzorci iz katerih se sestavlja skupine. Drugi del metode te skupine optimizira v skladu s ciljem, ki je minimalni ostanek neuporabnega materiala, in v skladu z omejitvami.

Metoda temelji na predpostavki, da je najbolje, če se v postopku razreza najprej da prednost daljšim dolžinam. Tako se zmanjša učinek ostrejših pogojev proti koncu postopka (angl. *Ending conditions*) (Trkman & Gradišar, 2007). S tem se poveča verjetnost, da bo zadovoljiva rešitev dejansko najdena. V ta namen se najprej tvori seznam naročil S_n urejen po padajočih dolžinah. Nato se izbere prvo oziroma najdaljšo dolžino iz seznama S_n in se ji določi ustrezen par. Če ima seznam S_n liho število naročil, se ga dopolni do sodega števila tako, da se mu na koncu doda še eno naročilo z dolžino *maxint* in številom kosov 1. *maxint* v programskem jeziku pri algoritmih pomeni največje celo število, ki je lahko predstavljeno v računalniku. Pri enojni natančnosti je to 32767. Ker tako velikega naročila ni možno realizirati, oziroma kombinirati z drugimi naročili, na razrez ne tako sploh ne vpliva. S tem se zagotovi, da bo imelo vsako naročilo svoj par. (Cesar *et al.*, 2011)

Vseh možnih kombinacij parov je $n (n-1) /2$. Pri iskanju optimalnega razreza za vse pare je takih možnosti eksponentno število glede na število kosov v zalogi. Zato je problem uvrščen v množico *NP* problemov (*NP*-poln).

Par se pri tej metodi določi tako, da za vse možne kombinacije najdaljše dolžine s seznama S_n z ostalimi krajšimi dolžinami reši problem nahrbtnika ob upoštevanju vse razpoložljive zaloge. Izbere se par z najmanjšim povprečnim ostankom. Povprečni ostanek se izračuna kot kvocient vsote ostankov uporabljenih palic iz skladišča, zmanjšane za uporabne ostanke, ki se jih vrne v skladišče. Ko je par izbran, se iz seznama S_n črta obe dolžini, ki ga sestavljata, iz zaloge pa tiste palice, ki se jih je za ta par porabilo skupaj z vrnjenimi uporabnimi ostanki. Postopek določanja parov se ponavlja, dokler so v seznamu S_n še razpoložljive dolžine. Rezultat tega postopka je $n/2$ parov. Vsakemu paru je pridružen povprečni ostanek. (Cesar *et al.*, 2011)

Namesto parov se lahko tvori tudi podskupine iz večjega števila naročil, tako da bi bilo to čim bolj usklajeno s številom N pri omejitvi (5). Tudi ta metoda se v osnovi ne bi spremenila. Za pare se je odločilo, ker v primerih z majhnim razmerjem med povprečno dolžino palice v skladišču in poprečno naročeno dolžino kaj drugega ne bi imelo smisla in ker je število možnih kombinacij, ki jih moramo preveriti, najmanjše. Poleg tega je zaradi tega v nadaljevanju postopka več možnosti pri oblikovanju končnih skupin. (Cesar *et al.*, 2011)

Dobljene pare se uredi po padajočem povprečnem ostanku v seznam S_r. S_r se nato razdeli na skupine parov tako, da se pomika od prvega proti zadnjemu. V vsaki skupini, razen morda v zadnji, je ravno toliko parov, da se ne preseže omejitve P ali M. Dobljene skupine parov se v nadaljevanju obravnava kot samostojna naročila. Pri tem jih povezuje skupna zaloga palic. Zato ni vseeno, v kakšnem vrstnem redu se bo izvajal razrez posameznih skupin. Prva skupina bo imela na voljo celotno zalogo palic v zalogi. Tako bo pri optimizaciji razreza na voljo več možnih kombinacij, zato se lahko pričakuje manjši ostanek (Gradišar *et al.*, 1999). Obratno pa bo pri optimizaciji kasnejših skupin na voljo samo še toliko zaloge, kot je ostalo od razreza prejšnjih skupin. Možnih kombinacij bo manj, pričakovan ostanek pa večji. (Cesar *et al.*, 2011)

V drugem delu se najprej določi vrstni red razreza posameznih skupin. Pri tem se izhaja iz predpostavke, da je bolje, če se pri razrezu da prednost skupinam s pari, ki so višje na seznamu S_r in imajo torej višji pričakovani ostanek. Metoda je osnovana na domnevi, da bi se ostanek bolj povečal, če bi se te skupine razrezalo na koncu, kot bi se povečal, če se na koncu reže skupine z nižjim pričakovanim ostankom. Vrstni red razreza materiala znotraj skupine je torej enak kot vrstni red tvorjenja le teh. Optimizacijo razreza posamezne skupine se lahko izvede po katerikoli metodi za reševanje *CSPUL*. Izbrana je metoda *C-CUT* (Gradišar & Trkman, 2005) v obliki programske rešitve, ki omogoča nastavljanje največjega števila naročenih dolžin, ki se režejo iz posamezne palice na zalogi in ki uporablja eksaktno metodo za manj obsežne skupine. (Cesar *et al.*, 2011)

Rezultat drugega dela je načrt razreza, ki vsebuje dve vrsti ostankov. Manjši od D so izguba, daljši pa se vrnejo v skladišče (Cesar *et al.*, 2011).

Navedeno predstavljam z algoritmom 3, zapisanem v psevodkodi (Cesar *et al.*, 2011)[116].

Algoritem 3: Prvi del algoritma. Določitev parov.

Razvrsti naročila po padajočih dolžinah v S_n ($l_1 > l_2 > \ldots > l_i > \ldots > l_n$).

$j \leftarrow 1, \ldots, n - 1; \; k \leftarrow 2, \ldots, n$

[116] Referenca je ustrezna le pri prvem in drugem delu algoritma.

$R_{j,k} \leftarrow maxint \; \forall \; j, k$ (začetne vrednosti povprečnih ostankov vseh parov)

$i \leftarrow 1$ (začetna vrednost števca i)

$h \leftarrow 1$ (začetna vrednost indeksa parov z minimalnimi ostanki)

ponavljaj dokler $i < n - 1$

$p \leftarrow i + 1$ (začetna vrednost števca p)

$R_{min} \leftarrow maxint$ (začetna vrednost minimalnega ostanka)

$c \leftarrow 0$ (začetna vrednost testne spremenljivke c)

ponavljaj dokler $p < n$

če $l_i > 0 \wedge l_p > 0$ **potem**

Izvedi proceduro KNAPSACK[117] za l_i in l_p.

Izračunaj povprečni ostanek R.

če je $R < R_{min}$ **potem**

$R_{min} \leftarrow R$

$j \leftarrow i$

$k \leftarrow p$

$c \leftarrow 1$ (c testira ali je vsaj enkrat veljalo $R < R_{min}$)

konec če

konec če

$p \leftarrow p + 1$

konec ponavljanj

če $c = 1$ **potem**

$R_h \leftarrow R_{min}$

$s1_h \leftarrow j$

$s2_h \leftarrow k$

$l_j \leftarrow 0$; $l_k \leftarrow 0$ (iz zaloge odstranimo palice, ki jih je porabil par l_j in l_k)

$h \leftarrow h + 1$

[117] Procedura KNAPSACK je enaka kot v (Gradišar *et al.*, 1999).

konec če

$i \leftarrow i + 1$

konec ponavljanj

Algoritem 4: Drugi del algoritma. Oblikovanje skupin.

Razvrsti povprečne ostanke R_h in pripadajoče številke parov po padajoči vrednosti R_h v seznamе $S_r(R_1 > R_2 > \ldots > R_{n/2})$, $S_{p1}(s1_1, s1_2 \ldots s1_{n/2})$ in $S_{p2}(s2_1, s2_2 \ldots s2_{n/2})$.

$h \leftarrow 1$ (začetna vrednost števca parov)

$a \leftarrow 1$ (trenutno število različnih naročil v skupini)

$b \leftarrow 0$ (trenutna skupna dolžina naročil v skupini)

$g1 \leftarrow 1$ (trenutna spodnja meja skupine)

ponavljaj dokler $h \leq n / 2$

$i \leftarrow g1$

ponavljaj dokler $i \leq h$

$a \leftarrow a + 2$

$b \leftarrow l_{s1i} . b_{s1i} + l_{s2i} . b_{s2i}$

$i \leftarrow i + 1$

konec ponavljanj

če $a > P \vee b > M$ **potem**

$g2 \leftarrow i - 2$ (trenutna zgornja meja skupine)

če $g1 < g2$ **potem**

$g1 \leftarrow g2$ (Če že en sam par preseže omejitev P ali M, ga vseeno razrežemo.)

konec če

Izvedi optimizacijo razreza skupine parov $s1_{g1}$ *do* $s1_{g2}$ in $s2_{g1}$ *do* $s2_{g2}$ s programom C-CUT[118].

$g1 \leftarrow g2 + 1$

$h \leftarrow h - 1$

[118] Program *C-CUT* je enak kot v (Gradišar & Trkman, 2005).

konec če

$h \leftarrow h + 1$

konec ponavljanj

KONEC METODE*
***Zahvala: prof. dr. Mirku Gradišarju za pomoč pri algoritmu.**

Predlagana metoda je implementirana v obliki računalniškega programa G-CUT, ki omogoča reševanje problema, definiranega po predlagani metodi. Numeričen del je napisan v programskem jeziku Fortran, ki omogoča hitro procesiranje. Vhod in izhod pa sta izvedena v *4GL* (angl. *Fourth-generation programming language*, označuje programski jezik četrte generacije). Kot je razvidno iz prikazanega algoritma, program *G-CUT* vsebuje tudi program *C-CUT*, ki omogoča optimizacijo razreza posamezne skupine s kombinacijo eksaktnega in hevrističnega algoritma. Za eksaktno reševanje uporablja programsko rešitev *CPLEX*. Z eksaktnimi metodami se lahko optimizira naročila, ki ne presegajo določenih omejitev (Belov & Scheithauer, 2002, Alves & Carvalho, 2008). Večje skupine pa *C-CUT* rešuje s hevrističnim algoritmom (Gradišar & Trkman, 2005). (Cesar *et al.*, 2011)

Omejitve programa *G-CUT* so:

- število naročil < 500;
- število kosov posameznega naročila < 500;
- število dolžin na zalogi < 500;
- število kosov posamezne dolžine na zalogi < 1000.

7 REZULTATI

Rezultate prikazujem v dveh vsebinskih sklopih. Najprej predstavljam podrobno reševanje problema iz prakse. Nato sledi reševanje generiranih problemov, kjer je prikazana učinkovitost metode. Prikaz učinkovitosti je prikazan s primerjavo treh različnih načinov reševanja:

- reševanje brez skupin,
- reševanje s predstavljeno metodo za oblikovanje skupin,
- reševanje s konkurenčno metodo za oblikovanje skupin.

7.1 Podrobna predstavitev – koraki pri reševanju problema iz prakse

Za ilustracijo delovanja programa *G-CUT* predstavljam optimizacijo konkretnega praktičnega primera enodimenzionalnega razreza jeklenih profilov. Primer ima naslednje omejitve: P = 8, N = 2, M = 150000 mm in D = 2500 mm. (Jain, 2008; Cesar *et al.*, 2011)

Vhodni podatki so prikazani v tabeli 3:

Tabela 3: Vhodni parametri (palice na zalogi in pri naročilu)

ZALOGA **dolžina palice (mm)**	**število kosov**	**NAROČILO** **dolžina palice (mm)**	**število kosov**
12965	7	9940	4
11965	10	9450	2
10965	37	8480	2
6945	2	7530	2
6465	4	6910	4
		6145	2
		6000	4
		5710	2
		5600	12
		5280	8
		4825	12
		420	18

Vir: Jain, 2008, Cesar *et al*., 2011.

Dolžine naročila metoda najprej uredi po velikosti od najdaljše do najkrajše in pripiše število kosov.

Iz primera je razvidno, da naročilo brez vračunanih ostankov po skupni dolžini obsega 52% materiala zalogi. Razmerje med povprečno dolžino palice na strani zaloge in tisto na strani naročila je nizko in znaša 1,55. V povprečju se torej iz palic na skladišču odreže manj kot dva kosa naročila. (Cesar *et al*., 2011)

Rezultat prvega dela metode je seznam parov. Seznam je urejen padajoče glede na povprečni ostanek. Naročenih dolžin v opisanem problemu je dvanajst. Pri reševanju se posledično rokuje s šestimi pari. Postopek reševanja, ki zadeva razdelitev naročenih dolžin po parih in nato po skupinah, je prikazan s tabelo 4.

Tabela 4: Razdelitev na pare in skupine[119].

št. para	naročilo #1 (mm)	naročilo #2 (mm)	povprečni ostanek (mm)	
1	7530	4825	1113	**prva skupina**
2	8480	5280	1098	
3	6000	5600	565	
4	9450	6910	528	

Se nadaljuje na naslednji strani.

[119] Naročilo je tu sinonim za dolžino naročene palice.

Nadaljevanje tabele 4 iz prejšnje strani.

št. para	naročilo #1 (mm)	naročilo #2 (mm)	povprečni ostanek (mm)	
5	9940	420	135	**druga skupina**
6	6145	5710	101	

Vir: Cesar *et al.*, 2011.

Zaradi omejitve P = 8 naročila ni mogoče rešiti brez skupin. Pare se zato razdeli v dve skupini. Prvo skupino sestavljajo prvi štirje pari z osmimi naročenimi dolžinami. Drugo skupino sestavljata zadnja dva para s štirimi naročenimi dolžinami. S programom *C-CUT* se najprej optimizira prvo skupino, ki jo tvorijo pari z večjim povprečnim ostankom. Pri tem je na voljo celotna zaloga palic. Preostale palice pri zalogi pa se uporabi pri reševanju druge skupine.

Rezultate za prvo skupino prikazujem v naslednji tabeli, ki ima dva dela:

- Prvi del vsebuje vhodne parametre. Na razpolago je:
  - vsa zaloga in
  - del izbranega naročila .

- Drugi del, ki je prikazan v tabeli 5 in 6, vsebuje načrt razreza za obe skupini.

Tabela 5: Podroben načrt razreza prve skupine.

PODATKI			
ZALOGA		**NAROČILO**	
dolžina palice (mm)	**število kosov**	**dolžina palice (mm)**	**število kosov**
12965	7	7530	2
11965	10	4825	12
10965	37	8480	2
6945	2	5280	8
6465	4	6000	4
		5600	12
		9450	2
		6910	4

NAČRT RAZREZA

dolžina palice (mm)	**kosov zaloge**	**vzorec rezanja naročil**	**ostanek (mm)**
6945	2	1×6910	35
12965	2	1×7530, 1×4825	610
12965	2	1×6000, 1×6910	55
10965	8	1×5280, 1×5600	85
10965	2	1×4825, 1×6000	140
10965	4	1×4825,1×5600	540
10965	2	2×4825	1315

Se nadaljuje na naslednji strani.

Nadaljevanje tabele 5 iz prejšnje strani.			
dolžina palice (mm)	**kosov zaloge**	**vzorec rezanja naročil**	**ostanek (mm)**
10965	2	1×9450	1515
10965	2	1×8480	2485

Vir: Vir: Jain, 2008; Cesar et al. 2011.

Skupni neuporabni ostanek pri prvi skupini je 15150 mm.

Tabela 6: Podroben načrt razreza druge skupine.

PODATKI			
ZALOGA		**NAROČILO**	
Dolžina palice (mm)	**Število kosov**	**Dolžina palice (mm)**	**Število kosov**
12965	3	9940	4
11965	10	420	18
10965	17	6145	2
6465	4	5710	2

NAČRT RAZREZA			
dolžina zaloge (mm)	kosov zaloge	vzorec rezanja naročil	ostanek (mm)
11965	2	1×6145, 1×5710	110
12965	2	1×9940, 7×420	85
10965	2	1×9940, 2×420	185

Vir: Cesar *et al.*, 2011.

Skupni ostanek druge skupine je 760 mm. Skupna izguba materiala za celotno naročilo je 15910 mm. Rešitev je eksaktna.

Vsi ostanki se štejejo kot neuporabni, ker meja znaša 2500 mm. Največji ostanek v obeh skupinah pa je pod to mejo in znaša 2485 mm.

Prikazani primer je sicer vzet iz prakse, vendar pa predstavlja izjemno majhno naročilo. Izbran je bil zato, ker je zaradi enostavnosti lažje razumljiv in s tem primernejši za predstavitev metode (Cesar *et al.*, 2011). Dodatna prednost, ki nastopi pri majhnih naročilih je, da so lahko rešeni eksaktno. Za rešitev prikazanega primera je osebni računalnik (Intel Core i7 3770 3,4 GHz) potreboval dobre 3 sekunde.

7.2 Primerjava (rešitev brez skupin)

Rešitev s skupinami primerjam še z rešitvijo brez skupin (isti vhodni parametri). Načrt razreza brez skupin je prikazan v tabeli.

Tabela 7: Načrt razreza pri optimizaciji enodimenzionalnega razreza brez skupin (isti primer brez skupin)

NAČRT RAZREZA

dolžina zaloge (mm)	kosov zaloge	vzorec rezanja naročil	ostanek (mm)
11965	2	1×6145, 1×5710	110
12965	2	1×6910, 1×6000	55
12965	2	1×7530, 1×5280	155
10965	12	1×5600, 1×4825, 1×420	120
10965	3	2×5280	405
10965	1	1×8480 4×420	805
10965	4	1×9940	1025
10965	2	1×9450	1515
10965	1	1×8480	2485
6945	2	1×6910	35
6465	2	1×6000, 1×420	45
6465	2	1×6145	320

Vir: lastni izračun.

Skupni ostanek za prikazan primer je 14515 mm. To je 1395 mm manj kot pri rešenem primeru s skupinama, oz. 8,8% manj. Razlika je 0,4% glede na količino porabljenega materiala med obema načrtoma razreza (prvo naročilo ima skupine, medtem ko jih drugo naročilo nima).

7.3 Primerjava (generiranje skupin s konkurenčno metodo)

Optimizaciji enodimenzionalnega razreza po skupinah in brez skupin sta bili prikazani. Za uspešno primerjavo je potrebno optimizacijo po skupinah uvrstiti na interval med dve točki. Ena je optimizacija brez skupin. Druga pa optimizacija z alternativno optimizacijo po skupinah (konkurenčna metoda).

Delovanje sedanjih in konkurenčnih metod je prikazano v tekočem podpoglavju. Sedanje metode delujejo po principu požrešnega algoritma, ki je prilagojen problemom razreza. Princip delovanja sedanjih metod je razviden iz korespondence z (Jain, 2008)[120].

Glavni koraki take metode so prikazani z algoritmom 6:

Algoritem 5: Metoda za preprostejše generiranje skupin po korakih.

- Naročene dolžine se razvrstijo po dolžini (od največje do najmanjše).

[120] Za predstavljen primer so skupine oblikovane na način, kjer je jasno razvidno, da gre za požrešno metodo. Izjema so lahko le palice, ki so bistveno krajše (vsaj 10-krat glede na povprečno dolžino v naročilu) . Te palice se lahko kombinira v skupine kjerkoli, vendar največ eno dolžino s poljubnim številom kosov (Jain, 2008).

- Seznam razvrščenih dolžin se razdeli na tri dele, kjer
    - prvi del vsebuje daljše dolžine,
    - drugi del krajše dolžine in
    - tretji del vsebuje palice z dolžino, ki je vsaj desetkrat krajša od povprečne dolžine v naročilu.
- Oblikuje se skupino, kjer
    - se vzame po eno dolžino, ki je uvrščena najvišje iz prvega in drugega dela, ki sta bila razdeljena v prejšnjem koraku;
    - dolžine se jemlje, dokler je mogoče, nakar se poskuša kombinirati še palice iz tretjega dela in nadaljuje dokler skupina ni polna, ko se
    - odpre novo skupino.
- Po opisanem postopku se skupine oblikuje, dokler naročenih kosov ne zmanjka.

Iz prikazanega opisa je razvidno, da se v načrtu razreza pri opisanem algoritmu najprej upoštevajo najdaljše dolžine, kar je značilnost požrešnih algoritmov. To pomeni, da naključno generiranje skupin že predstavlja relativno učinkovito método za reševanje problema.

Razdelitev naročila s konkurenčno metodo je prikazana v tabeli 8.

Tabela 8: generiranje skupin (prva skupina)

št. para	naročilo #1 (mm)	naročilo #2 (mm)	
1	9940	6000	**prva skupina**
2	9450	5710	
3	8480	5600	
4	7530	5280	

Vir: lastni izračun.

Prva skupina, oblikovana po konkurenčni metodi, ima enako število različnih dolžin v skupini. Enako velja za drugo skupino (gl. tabelo 9).

Tabela 9: generiranje skupin (druga skupina)

št. para	naročilo #1 (mm)	naročilo #2 (mm)	
1	6910	4825	**druga skupina**
2	6145	420	

Vir: lastni izračun.

Načrt razreza za prvo skupino je prikazan v tabeli 10.

Tabela 10: Načrt razreza za prvo skupino, ki je generirana po principu konkurenčne metode[121]

NAČRT RAZREZA – PRVA SKUPINA			
dolžina zaloge (mm)	kosov zaloge	vzorec rezanja naročil	ostanek (mm)
11965	2	1×5710, 1×5600	655
12965	2	1×7530, 1×5280	155
11965	4	1×6000, 1×5600	365
10965	6	1×5600, 1×5280	85
10965	4	1×9940	1025
10965	2	1×9450	1515
10965	2	1×8480	2485

Vir: lastni izračun.

Skupen ostanek pri prvi in skupini je sedaj 15690 mm (prej 15150mm).

Postopek se ponovi še za drugo skupino (gl. tabelo 11).

Tabela 11: Načrt razreza za drugo skupino po principu konkurenčne metode

NAČRT RAZREZA – DRUGA SKUPINA			
dolžina zaloge (mm)	kosov zaloge	vzorec rezanja naročil	ostanek (mm)
12965	1	2×6145, 1×420	255
12965	1	1×6910, 1×4825, 2×420	390
11965	1	1×6910, 1×4825	230
10965	5	2×4825, 3×420	55
6945	2	1×6910	35

Vir: lastni izračun.

Skupna dolžina neuporabnega ostanka po drugi skupini po konkurenčni metodi znaša 1220 mm (prej 760 mm).

Za celotno naročilo je višina neuporabnega ostanka 16910 mm, kar je za 1000 mm več kot prej. Relativna razlika med neuporabnima ostankoma za metodo *G-CUT* in metodo z naključnim generiranjem skupin znaša 6,3 %. Vsega porabljenega materiala je za 0,3 % več kot pri metodi *G-CUT*.

7.4 Analiza rešitev pri generiranih primerih

V poglavju najprej opisujem postopek testiranja metode in način merjenja njene učinkovitosti. V nadaljevanju opisujem rezultate.

[121] Vhodnih parametrov ne prilagam. Zaloga je identična prejšnjim primerom. Pri naročilu pa so pri načrtu razreza upotevane le te, ki odpadejo na prvo skupino, ki sem jo izračunal z alternativno metodo.

7.4.1 Rezultati – opis testiranja in izbor parametrov

Enodimenzionalne probleme razreza generiram z generatorjem *CUTGEN1* (Gau & Wäscher, 1995). Glede uporabe generatorja sva z Wäscherejem govorila tudi za primere predstavljene v tej doktorski disertaciji[122]. Ključna informacija iz pogovora je, da generator proizvede le sto različnih problemov, kasneje pa se le-ti začnejo ponavljati. Statistična analiza več kot stotih primerov zato ni več kredibilna[123] (Wäscher, 2012). *CUTGEN1* se še vedno uporablja pri raziskovanju različnih problemov razreza (Brandão *et al.*, 2011; Golfeto *et al.*, 2012).

Generiranje primerov s *CUTGEN1* je lahko različno. Tu se poslužujem naslednjega postopka. Najprej generiram palice na zalogi. Isti postopek ponovim pri generiranju palic pri naročilu. Pri tem se za naročilo prilagaja parametre tako, da se vzpostavi ustrezno razmerje med povprečnima dolžinama palic pri zalogi in pri naročilu. Ustrezno razmerje je nizko in je nižje od 3:1. Ključ generatorja se prikaže z identifikacijskimi številkami od 00000001 naprej (Wäscher, 2012)[124].

Analiza je narejena za obsežnejše primere, ki se jih praviloma rešuje s hevrističnimi metodami. Mejo med eksaktnim in hevrističnim literatura okvirno postavlja za probleme z naslednjimi vhodnimi parametri:

- 5 različnih dolžin palic na strani zaloge in 40 kosov na strani naročila (Belov & Scheithauer, 2002),
- naročila z do 100 kosi (Alves & Carvalho, 2008).

Testiranje generiranih primerov je narejeno za primere, ki jih literatura načeloma rešuje s hevrističnimi metodami. Vprašanje, ali je primere mogoče rešiti eksaktno ali hevristično, z vidika analize učinkovitosti metode *G-CUT* niti ni bistveno. Bistven del je v razdelitvi naročila na skupine, ki se jih nato optimizira (ta del je mogoče implementirati s katerokoli drugo metodo). Pri analizi učinkovitosti je v nadaljevanju dokazano, da je metoda za optimizacijo po skupinah boljša od obstoječih. Pri tem se vzpostavlja raven učinkovitosti metode (angl. *Benchmark*). Ta *benchmark* je uporaben za ostale raziskovalce, ki bodo študirali problem reševanja enodimenzionalnega razreza po skupinah. Učinkovitost teh metod se bo merila z rezultati, ki jih prilagam. Ključna je uvrstitev na interval med metodi:

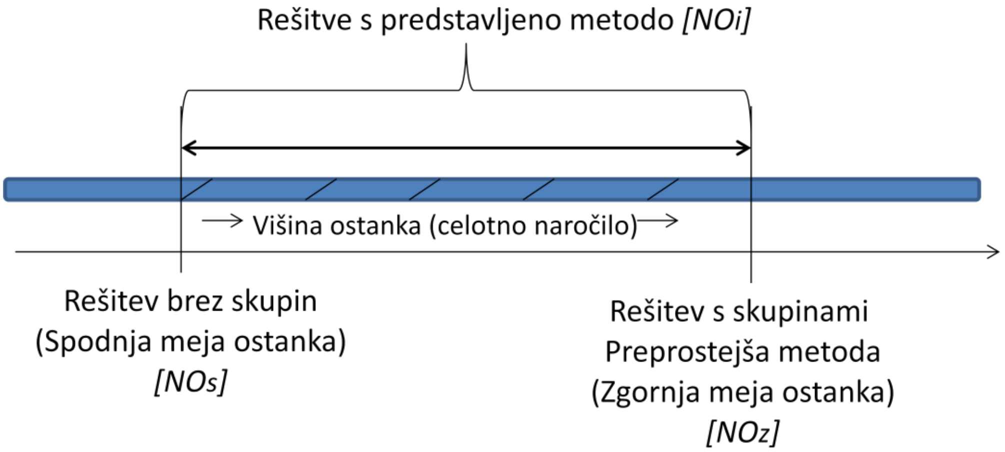
- reševanje brez skupin in
- reševanje s konkurenčno[125] metodo za generiranje skupin.

---

[122] V sklopu konference: *Conference on Cutting and Packing Problems* leta 2012.
[123] V literaturi je sicer več takih primerov. Kadar je recenzent znanstvenega članka G. Wäscher, takega članka ne odobri. Večina avtorjev se te meje strogo drži (Cerqueira & Yanasse, 2009).
[124] Identifikacijske številke so lahko poljubne. Interval med identifikacijskimi številkami ključa v sklopu ene analize nikakor ne sme presegati številke 100 (Wäscher, 2012).
[125] V nadaljevanju jo v sliki 37 poimenujem tudi kot preprostejšo metodo.

Preizkus metode temelji na statičnosti, torej brez časovne dimenzije. Vsako naročilo in zaloga se generirata na novo.

Slika 37: Interval rešitev



Vir: lastna slika.

Rešitve brez skupin predstavljajo spodnjo mejo ostanka (NO_s)[126]. Rešitve, ki jih izračuna algoritem pri konkurenčni metodi, predstavljajo zgornjo mejo ostanka (NO_z). Pri tem ne trdim, da v teoriji ali praksi te meje dejansko predstavljajo spodnjo ali zgornjo mejo[127] ostanka. Izrazi zgornja in spodnja meja ostanka v tem kontekstu služijo le kot referenčno točko za primerjavo metod. Te meje so izbrane izključno zaradi definiranja intervala, kamor je mogoče uvrstiti rešitve razvite metode. Izkazalo se je namreč, da rešitve razvite metode pri vseh rešenih primerih nastopajo na opisanem intervalu (gl. sliko 37). Glede na višino neuporabnega ostanka, ki je rezultat omenjenih metod, torej praviloma velja:

$NO_Z > NO_i > NO_S$.

Tudi v hipotetičnem primeru, da katera rešitev ne bi bila na intervalu, to verjetno ne bi premaknilo povprečja rešitev na območje izven intervala. Povprečje rešitev namreč predstavlja raven učinkovitosti metode, ki bo na voljo kasnejšim raziskovalcem pri primerjavi učinkovitosti njihovih metod.

Rezultate prikazujem grafično. Prikazujem 81 rešenih primerov z naslednjimi vhodnimi parametri (izračuni niso trajali več kot 300 sekund):

- Identifikacijsko številko ključa pri generatorju *CUTGEN1* (ID ključa).
    - Parametri od 00000001 do 00000081 (pri grafični predstavitvi jih poenostavljam in prikazujemo s številkami od 1 do 81).
- Število palic na zalogi.
    - Od 70 do 200 kosov.

[126] Kratica sestavljena iz: **n**euporabni **o**stanek, **s**podnja meja.
[127] Dejanska zgornja meja bi bila lahko rezultat povsem naključnega generiranja skupin.

- Različne dolžine palic na zalogi (L_j).
    - Od 5 do 20 (*MSSCSP* po tipologiji iz 2007).
- Število palic v naročilu.
    - Od 100 do 300.
- Različne dolžine palic v naročilu (l_j).
    - Od 12 do 32.
- Število skupin.
    - Je različno in razdeljeno na tri dele. Prva tretjina primerov je takih, ki so rešeni z dvema skupinama. Druga tretjina je rešena s tremi skupinami, zadnja tretjina pa obsega probleme, ki so rešeni s štirimi skupinami.
- Rešitve so podane za vse tri vrste reševanja v odstotkih glede na celoten material, ki je zahtevan v naročilu:
    - NO_i,
    - NO_s in
    - NO_z.

7.4.2 Rezultati – prikaz

Rezultate povzemam v treh delih, in sicer glede na število skupin. Najprej grafično prikažem rezultate, kjer nastopata dve skupini, kasneje preidem na rezultate za tri skupine, nato na rezultate s štirimi skupinami in nazadnje zaključim to podpoglavje s sklepno primerjavo vseh rezultatov.

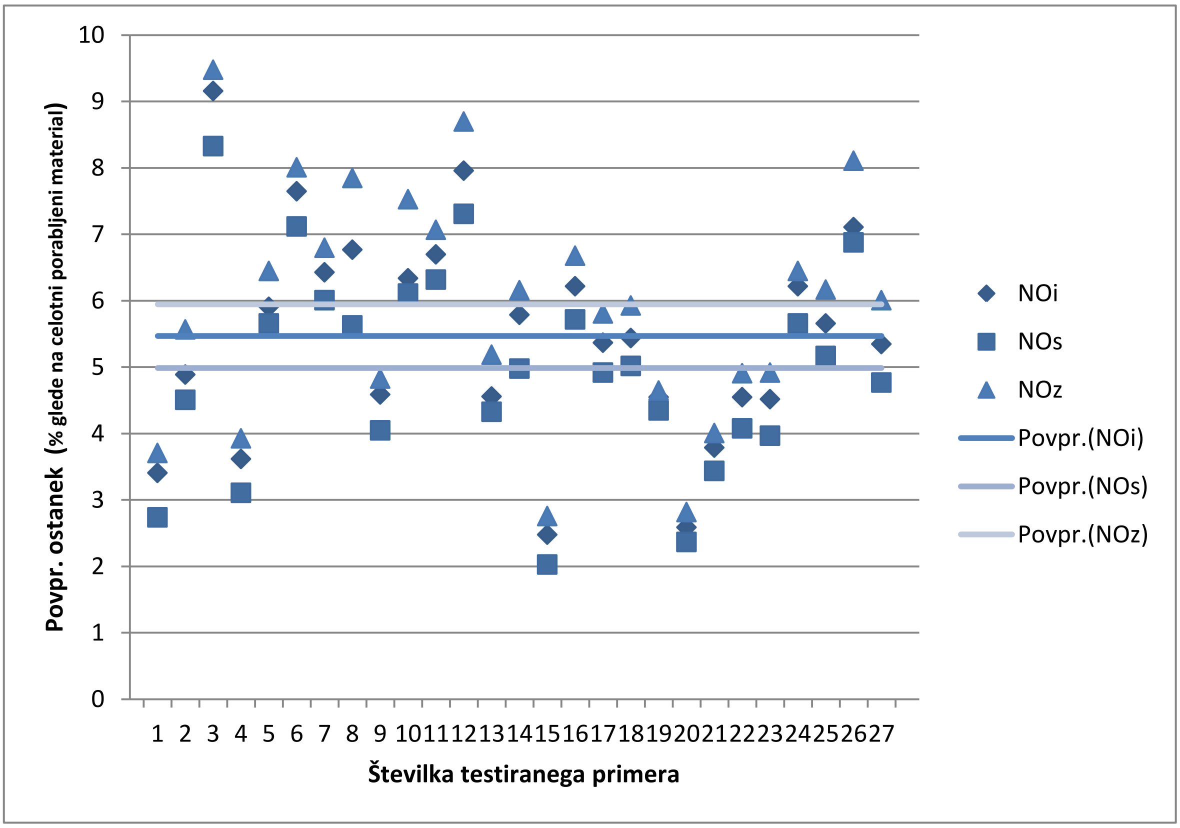
Probleme, ki so rešeni z dvema skupinama, prikazujem grafično s sliko 38. Na sliki so razvrščeni problemi glede na neuporabni ostanek materiala. Problemov z dvema skupinama je 27.

Ugotovitve za prvo tretjino rešenih problemov so:

- povprečni ostanek je od primera do primera različen pri vseh metodah;
- učinkovitosti metod so prikazane s povprečnimi vrednostmi neuporabnih ostankov materala, ki so:

- reševanje brez skupin: 4,98 %[128],
- reševanje s predlagano metodo: 5,47 %,
- reševanje s konkurenčno metodo: 5,94 %.

Slika 38: Rešitve problemov z dvema skupinama



Vir: lastni izračuni.

Iz prikaza je razvidno, da najučinkovitejše reševanje problemov nastopa pri optimizaciji brez skupin. Ko so skupine potrebne, pa je reševanje z razvito metodo boljše od konkurenčne.

Rešitve za naslednjih 27 problemov so prikazane s sliko 39. Problemi so nekoliko bolj obsežni in so rešeni s tremi skupinami.

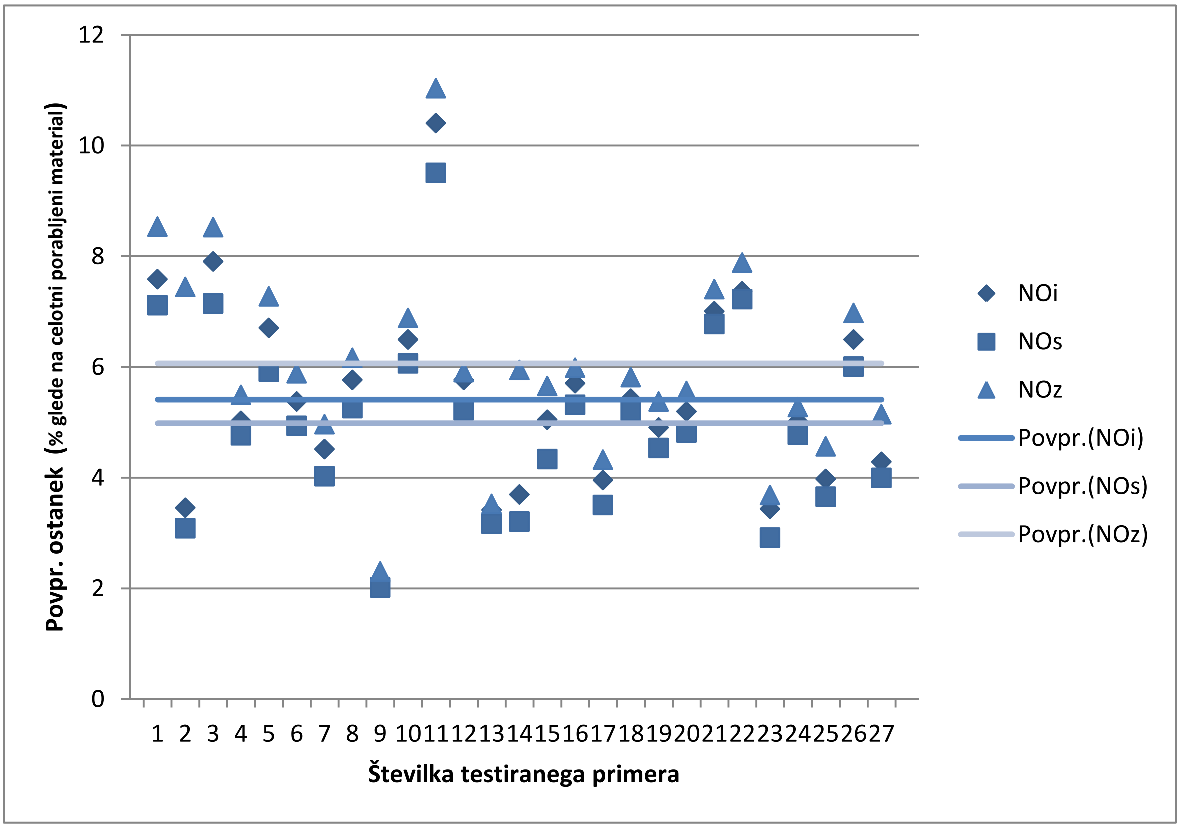
Ugotovitve za drugo tretjino rešenih problemov so:

- povprečni ostanek je od primera do primera različen pri vseh metodah;
- vrednosti neuporabnih ostankov po uporabljenih metodah so:
  - reševanje brez skupin: 4,97 %,
  - reševanje s predlagano metodo: 5,41 %,

[128] Glede na celotno naročilo.

- reševanje s konkurenčno metodo: 6,06 %.

Slika 39: Rešitve problemov s tremi skupinami



Vir: lastni izračuni.

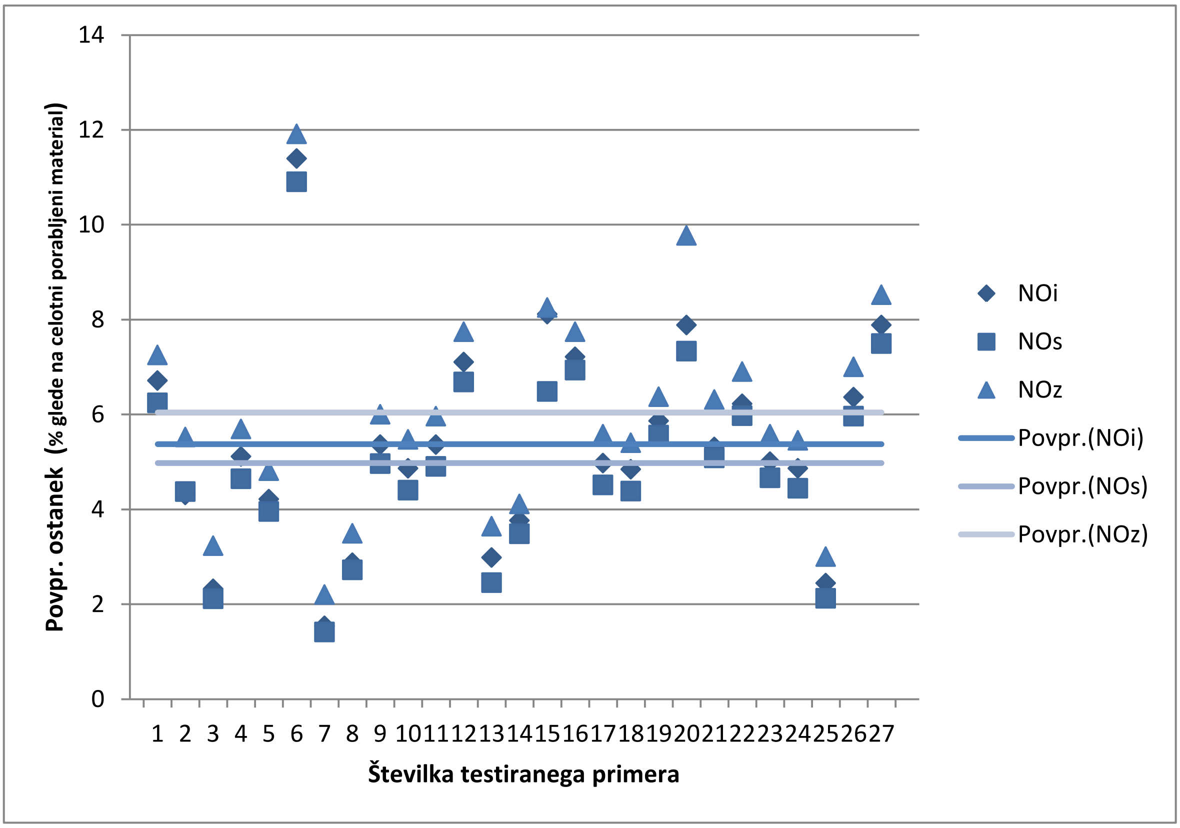
Razvrstitev metod po njihovi učinkovitosi je enaka kot pri rešitvah z dvema skupinama.

Rešitve za zadnjih 27 problemov so prikazane v sliki 40. Problemi so najbolj obsežni (4 skupine).

Ugotovitve za zadnjo tretjino rešenih problemov so:

- povprečni ostanek je od primera do primera različen pri vseh metodah;
- vrednosti neuporabnih ostankov po uporabljenih metodah so:
    - reševanje brez skupin: 4,95 %,
    - reševanje s predlagano metodo: 5,37 %,
    - reševanje s konkurenčno metodo: 6,03 %.

Slika 40: Rešitve problemov s štirimi skupinami



Vir: lastni izračuni.

Rešitve z dvema, tremi in štirimi skupinami obsegajo primere, kjer so palice na zalogi v povprečju od 2,5 do 3,0 daljše kot pri naročilih. Slednje velja za vse primere.

Na podlagi analiziranih primerov so sklepne ugotovitve naslednje:

- Rezultati razvite metode so vedno slabši kot pri rešitvah brez skupin, kar je skladno s pričakovanji. Glede na velikost naročila je razlika 0,44 %[129] (glede na vrednost celotnega porabljenega materiala).

- Optimizacija z uporabo skupin z lastno metodo je v vseh primerih boljša od konkurenčne metode za generiranje skupin. Glede na velikost naročila ta razlika znaša 0,60 %[130].

Učinkovitost metode se z obsežnostjo problema praviloma pomika od sredine intervala med NO_S in NO_Z k NO_S. Pri tem za razvito metodo velja še naslednje:

- Bolj kot je naročilo obsežno, manjši je delež neuporabnega ostanka (v povprečju). Gl. tudi opombo št. 127 (noga strani), ki ponazarja zgornjo trditev.

[129] 0,48 % (dve skupini), 0,43 % (tri skupine) in 0,40 % (štiri skupine).
[130] 0,48 % (dve skupini), 0,65 % (tri skupine) in 0,67 % (štiri skupine).

- Razlika med povprečnima vrednostima za NO_i in NO_S se rahlo zmanjšuje z obsežnostjo naročila.

- Razlika med povprečnima vrednostima za NO_Z in NO_i se povečuje z obsežnostjo naročila.

8 SKLEP

V doktorski disertaciji sem obravnaval primer enodimenzionalnega problema razreza, ki ga je potrebno reševati po skupinah. Primer prihaja iz gospodarstva in še ni bil predhodno opisan v znanstveni literaturi. S pričujočo doktorsko nalogo sem ta problem vključil v teorijo, pri čemer sem problem opisal in matematično formuliral. Doktorska disertacija vključuje opis nove metode za reševanje takih problemov. Pri tem sem vzpostavil raven učinkovitosti, ki bo služila kot primerjava metod pri nadaljnjih raziskovanjih.

Problem sem v disertaciji opisal v sklopu operacijskih raziskav. Tu sem prikazal različna področja, pri katerih se razrez kot aktivnost pojavlja. Eno izmed teh področij so proizvodni sistemi, zaradi katerih sem obširneje kot sicer opisoval tudi patente. Patenti so vedno bolj pogosti in v zadnjem času vsebujejo tudi vedno več opisov metod za reševanje problemov razreza (prvotno so opisovali le načrte strojev in orodij). Pri razrezu po skupinah sem se oprl še na sklop managementa oskrbovalne verige, ker so skupine rezultat različnih notranjih dejavnikov in značilnosti podjetja (notranja logistika ter kapaciteta in delovanje stroja). Pri proučevanju problema sem obiskal tri železarne, saj problem razreza po skupinah prihaja iz jeklarske panoge. V vsaki železarni kot ključno navajajo tudi poznavanje verjetnostnih modelov. Štore Steel d.o.o. imajo celo svojo raziskovalno skupino, ki se ukvarja z razvojem metod za učinkovitejše strjevanje jekla. Pri tem je ključno formiranje kristalov in posledičen nastanek anomalij v jeklenih profilih, ki lahko povzročijo večjo količino neuporabnega materiala kot pa neučinkovit razrez. Včasih je potrebno glede na te anomalije prilagoditi tudi sam načrt razreza. Glavno področje pri opisu problema so optimizacije. Problemi razreza se namreč uvrščajo med diskretne optimizacije (kadar je cilj najti tak načrt razreza, da je neuporaben ostanek materiala čim manjši).

Metoda za reševanje problema razreza po skupinah je bila testirana na enainosemdesetih naključno generiranih problemih. Metoda učinkovito rešuje probleme razreza in omogoča generiranje skupin. Glede na rezultate je metoda boljša od alternativ. Na podlagi tega dejstva hipotezo iz uvoda doktorske disertacije sprejmem.

Sedanja metoda je narejena za nizko razmerje med dolžinami palic. Metoda za višje razmerje ni primerna brez večjih prilagoditev. Prilagoditev metode je ob ustrezni utemeljitvi lahko eno izmed izhodišč za nadaljne delo.

Raziskovalno delo je možno nadaljevati v vač smereh. Predlagana metoda rešuje probleme v eni dimenziji. V prihodnosti bi se lahko pojavile metode, ki bi probleme reševale v več dimenzijah.

Vedno več metod v literaturi omogoča vračanje uporabnih ostankov nazaj na zalogo (problemi tipa *CSPUL*). Opisano metodo razreza po skupinah se lahko prilagodi tudi za *CSPUL*.

Optimizacijo problemov razreza po skupinah se lahko poveže in bolje utemelji s poslovnim procesom v podjetju, s katerim bi se bolje utemeljilo smotrnost skupin. Podoben primer za splošno področje enodimenzionalnega razreza je (Erjavec *et al.*, 2009).

Iztočnice za nadaljne raziskovalno delo sem podal, vendar je prihodni razvoj na področju razreza težko določiti; sploh ker se vsako leto objavi vedno več znanstvenih člankov in prijavi vedno več novih patentov s tega področja.

LITERATURA

1. Abu-Ghazaleh, H., & Alfa, A. S. (2010). Application of Mobility Prediction in Wireless Networks Using Markov Renewal Theory *IEEE Transactions on Vehicular Technology, 59*(2), str. 788-802.

2. Ackoff, R. L. (1962). *Scientific Method: Optimizing Applied Research Decisions* New York: Wiley, 464 str.

3. Ackoff, R. L., & Sasinieni, W. M. (1968). *Fundamentals of operations research*. New York: Wiley, 455 str.

4. Afanasiev, M. Y., Bagrinovskii, K., & Matyushok, V. (2006). *Прикладные задачи исследования операций.* (Vol. 1). Moskva: Infra-M, 352 str.

5. Agrawal, M., Kayal, N., & Saxena, N. (2004). PRIMES is in P. *Annals of Mathematics and Artificial Intelligence, 160*(2), str. 781-793.

6. Aho, A. V. (2011). Complexity theory. V E. K. Blum & A. V. Aho (Eds.), *Computer Science: The Hardware, Software and Heart of It* (pp. str. 241-269). New York: Springer.

7. Alem-Junior, D. J. (2007). *O problema de corte de estoque com demanda estocástica (magistrska disertacija)*. São Carlos: Instituto de Ciências Matemáticas e de Computação, 82 str.

8. Alfieri A., Velde, S. L. v. d., & Woeginger, G. J. (2004). Roll cutting in the curtain industry. A well-solvable allocation problem. *European Journal of Operational Research, 183*(3), str. 1397–1404.

9. Allen, S. R., & Iacono, J. (2012). Packing identical simple polygons is NP-hard. *Polytechnic Institute of New York University. Computer science. Computational geometry, arXiv ID:1209.5307*.

10. Alt, M., Bischof, H., & Gorlatch, S. (2002). Algorithm Design and Performance Prediction in a Java-Based Grid System with Skeletons *Lecture Notes in Computer Science, 2400/2002*, str. 899-906.

11. Alves, C., Brás, P., Carvalho, J. M. V. d., & Pinto, T. (2012). A Variable Neighborhood Search Algorithm for the Leather Nesting Problem. *Mathematical Problems in Engineering, 2012*(Article ID 254346), 28 str.

12. Alves, C., & Carvalho, J. M. V. d. (2008). A stabilized branch-and-price-and-cut algorithm for the multiple length cutting stock problem. *Computers & Operations Research, 35*(4), str. 1315–1328.

13. Andréasson, N., Evgrafov, A., & Patriksson, M. (2007). *An Introduction to Continuous Optimization*: Professional Publishing Svc., 400 str.

14. Aneziris, C. G., Schärfl, W., Biermann, H., & Martin, U. (2009). Energy-Absorbing TRIP-Steel/Mg-PSZ Composite Honeycomb Structures Based on Ceramic Extrusion at Room Temperature. *International Journal of Applied Ceramic Technology, 6*(6), str. 727–735.

15. Arbiba, C., Marinellib, F., & Pezzella, F. (2012). An LP-based tabu search for batch scheduling in a cutting process with finite buffers. *International Journal of Production Economics, 136*(2), str. 287-296.

16. Archetti, C., Bouchard, M., & G., D. (2011). Enhanced Branch and Price and Cut for Vehicle Routing with Split Deliveries and Time Windows. *Transportation Science, 45*(3), str. 285-298.

17. Arenales, M. N. (2012a). Cutting stock problem applications (osebna komunikacija).

18. Arenales, M. N. (2012b). Sobras de segundo uso. San Cristobal de la Laguna, Tenerife, Islas Canarias (osebna komunikacija).

19. Arias, M. N. B., Pozos, A. T., & Ocampo, E. M. T. (2012). Estudio del problema de corte y empaquetamiento aplicado en una empresa de distribución. *Scientia et Technica, 2*(51), str. 71-80.

20. Arkell, J. (1872). Improvement in paper-cutting machines. *United States Patent Office, št. patenta: 118327.*, 4 str.

21. Babu, A., Limaye, N., & Varma, G. (2010). Streaming algorithms for some problems in log-space. *Tata Institute of Fundamental Research, Mumbai, India*.

22. Balas, E., & Zemel, E. (1980). An algorithm for large zero-one knapsack problems. *Operations Research, 28*(5), str. 1130-1154.

23. Baldi, M., Crainic, T., Perboli, G., & Tadei, R. (2012). Branch-and-Price and Beam Search Algorithms for the Generalized Bin Packing Problem. *[https://www.cirrelt.ca/DocumentsTravail/CIRRELT-2012-01.pdf]*.

24. Ballou, R. H. (2004). *Logística: Administración de la cadena de suministro (quinta edición)*. Naucalpan de Juárez Pearson Educación de México, S.A. de C.V., 793 str.

25. Bang-Jensen, J., & Larsen, R. (2012). Efficient algorithms for real-life instances of the variable size bin packing problem. *Computers & Operations Research, 39*(11), str. 2848-2857.

26. Banker, D. R., & Kauffman, J. R. (2004). The Evolution of Research on Information Systems: A Fiftieth-Year Survey of the Literature in Management Science. *Management Science, 50*(3), str. 281-298.

27. Barnhart, C., Johnson, E. L., Nemhauser, G. L., Savelsbergh, M. W. P., & Vance, P. H. (1998). Branch-and-Price: Column Generation for Solving Huge Integer Programs. *Operations Research, 46*(3), str. 316-329.

28. Barsegjan, A. (2009). *Анализ данных и процессов.* (Vol. 3). Sankt-Petersburg: BHB-Peterburg, 512 str.

29. Baskan, O., Haldenbilen, S., Ceylan, H., & H., C. (2012). Estimating Transport Energy Demand Using Ant Colony Optimization. *Energy Sources, Part B: Economics, Planning, and Policy, 7*(2), str. 188-199.

30. Bead, C. O. (1846). Imporvement in machines for manufacturing wood-screws. *United States Patent Office, št. patenta: RE88*, 4 str.

31. Beffrey, P., Brinkerhoff, B. J., Johnson, A. J., Stock, R., & Workman, R. (2008). Electronic paper cutting apparatus and method for cutting. *European Patent Office, št. patenta: EP 1901879 A2*.

32. Beigel, R., & Fu, B. (2012). A Dense Hierarchy of Sublinear Time Approximation Schemes for Bin Packing. *Frontiers in Algorithmics and Algorithmic Aspects in Information and Management Lecture Notes in Computer Science, 7285*, str. 172-181.

33. Belov, G., & Scheithauer, G. (2002). A cutting plane algorithm for the one-dimensional cutting stock problem with multiple stock lengths. *European Journal of Operational Research, 141*(2), str. 274–294.

34. Benaïm, M., & Hirsch, M. W. (1999). Mixed Equilibria and Dynamical Systems Arising from Fictitious Play in Perturbed Games. *Games and Economic Behavior, 29*(1-2), str. 36-72.

35. Bernard, R. (1993). Decision science or decision-aid science? [doi: 10.1016/0377-2217(93)90312-B]. *European Journal of Operational Research, 66*(2), str. 184-203.

36. Best, N., G., Spiegelhalter, A. T., & Brayne, C., E., G. (1996). Bayesian Analysis of Realistically Complex Models. *Journal of the Royal Statistical Society. Series A (Statistics in Society), 159*(2), str. 323-342.

37. Bokhari, S. S. (2012). Parallel solution of the subset-sum problem: an empirical study. *Concurrency and Computation: Practice and Experience, 24*(18), str. 2241-2254.

38. Bolshan, Y., Getlik, M., Kuznetsova, E., Wasney, G. A., Hajian, T., Poda, G., Nguyen, K. T., Wu, H., Dombrovski, L., Dong, A., et al. (2013). Synthesis, Optimization, and Evaluation of Novel Small Molecules as Antagonists of WDR5-MLL Interaction. *ACS Medicinal Chemistry Letters*.

39. Book, R. V. (1988, 5. in 6. januar 1988). *Restricted relativizations of complexity classes.* Paper presented at the Computational complexity theory. Proceedings of symposia in applied mathematics, Atlanta, Georga, ZDA, str. 47 - 75.

40. Borovicka, A., Hlavacek, P., Hloch, S., & Valicek, J. (2012). A method for determining technology parameters for the abrasive waterjet cutting of materials. *European Patent Office, št. patenta: EP 2409812 A1*.

41. Bortfeldt, A. (2013). A reduction approach for solving the rectangle packing area minimization problem. *European Journal of Operational Research, 224*(3), str. 486–496.

42. Bortfeldt, A., & Jungmann, S. (2012). A tree search algorithm for solving the multi-dimensional strip packing problem with guillotine cutting constraint. *Annals of Operations Research, 196*(1), str. 53-71.

43. Bortfeldt, A., & Wäscher, G. (2012). Constraints in container loading – A state-of-the-art review. *European Journal of Operational Research*, V tisku.

44. Boukhny, M., Gordon, R., Morgan, M. D., & Yadlowsky, A. (2012). Method of Controlling a Surgical System Based on a Load on the Cutting Tip of a Handpiece. *United States Patent Office, št. patenta: US20120296264 A1*.

45. Brandão, J. S., Coelho, A. M., Vasconcellos, J. F. V., Salles, L. L. d., & Pinto, A. V. (2011). Application of Genetic Algorithm to Minimize the Number of Objects Processed and Setup in a One-Dimensional Cutting Stock Problem. *International Journal of Applied Evolutionary Computation (IJAEC), 2*(1), str. 34-48.

46. Brémaud, P. (1999). *Markov chains: Gibbs fields, Monte Carlo simulation, and queues*. New York: Springer Science + Business Media Inc., str. 53-95, 173-178.

47. Brixey, J. J., Robinson, D. J., Johnson, C. W., Johnson, T. R., Turley, J. P., Patel, V. L., & Zhang, J. (2007). Towards a hybrid method to categorize interruptions and activities in healthcare. *International Journal of Medical Informatics, 76*(11-12), str. 812-820.

48. Brooks, R. L., Smith, C. A. B., Stone, A. H., & Tutte, W. T. (1940). The dissection of rectangles into squares. *Duke Mathematical Journal 7,* str. 312-340.

49. Buerkle, L., Fischer, M., & Maurer, T. (2013). Method and control unit for determining a cutting trajectory of a curve section of a roadway. *United States Patent Office, št. patenta: US 20130006473 A1*.

50. Burkova, I. V. (2009). A method of network programming in problems of nonlinear optimization. *Automation and Remote Control, 70*(10), str. 1606-1612.

51. Cao, Y. J., & Wu, Q. H. (1997). Mechanical design optimization by mixed-variable evolutionary programming. *Proceedings of the 1997 IEEE Conference on Evolutionary Computation*, str. 443-446.

52. Caprara, A., Carvalho, M., Lodi, A., & Woeginger, G. J. (2013). A Complexity and Approximability Study of the Bilevel Knapsack Problem. *Integer Programming and Combinatorial Optimization. Lecture Notes in Computer Science 7801*, str. 98-109.

53. Carnahan, M. (1888). Machine for cutting I-beams. *United States Patent Office, št. patenta: 392662*, 4 str.

54. Carnieri, C., Mendoza, G. A., & Gavinho, L. G. (1994). Solution procedures for cutting lumber into furniture parts. *European Journal of Operational Research, 73*(3), 24 str.

55. Cerqueira, G. R. L., & Yanasse, H. H. (2009). A pattern reduction procedure in a one-dimensional cutting stock problem by grouping items according to their demands. *Journal of Computational Interdisciplinary Sciences, 1*(2), str. 159-164.

56. Cesar, M., Gradišar, M., Erjavec, J., & Tomat, L. (2011). Optimizacija procesa razreza po skupinah. *Economic and Business Review, 13*(Posebna številka), str. 27-40.

57. Chang, Y. C., & Chang, R. F. (2013). OO-Based STATCOM Installation for Power System Loading Margin Improvement. *Applied Mechanics and Materials, 284-287,* str. 1087-1093.

58. Chélina, Y., Azzagb, K., Cañadasa, P., Aversenga, J., Baghdiguianb, S., & Maurin, B. (2013). Simulation of cellular packing in non-proliferative epithelia. *Journal of Biomechanics, 46*(6), str. 1075–1080.

59. Chen, J. L., & Tsao, Y. C. (1993). Optimal design of machine elements using genetic algorithms. . *Journal of the Chinese Society of Mechanical Engineers*, *14*(2), str. 193-199.

60. Chen, Z.-L., & Pundoor, G. (2009). Integrated Order Scheduling and Packing. *Production and Operations Management, 18*(6), str. 672-692.

61. Cherri, A. C. (2009). *Algumas extensões do problema de corte de estoque com sobras de material aproveitáveis (doktorska disertacija)*. São Carlos: Ciências Matemáticas e de Computação (ICMC), Universidade de São Paulo, 215 str.

62. Cherri, A. C., Arenales, M. N., & Yanasse, H. H. (2009). The one-dimensional cutting stock problem with usable leftover – A heuristic approach. *European Journal of Operational Research, 196*(3), str. 897–908.

63. Cherri, A. C., Arenales, M. N., & Yanasse, H. H. (2012). The usable leftover one-dimensional cutting stock problem—a priority-in-use heuristic. *International Transactions in Operational Research 20*(2), str. 189-199.

64. Cherri, A. C., JuniorII, D. J. A., & Silva, I. N. d. (2011). Inferência fuzzy para o problema de corte de estoque com sobras aproveitáveis de material. *Pesquisa Operacional, 31*(1).

65. Chung, C.-S., Flynn, J., Kuik, R., & Staliński, P. (2013). A single-period inventory placement problem for a supply system with the satisficing objective. *European Journal of Operational Research, 224*(3), str. 520–529.

66. Churchman, C. W. (1961). *Prediction and optimal decision: philosophical issues of a science of values*. New Jersey: Prentice-Hall, Englewood Cliffs, 394 str.

67. Churchman, C. W., Ackoff, R. L., & Arnoff, E. L. (1968). *Operations research : eine Einführung in die Unternehmensforschung*. Dunaj: Oldenbourg, 588 str.

68. Cohek, P. (1875). Improvement in machines for cutting roll-paper. *United States Patent Office, št. patenta: 167645*, 4 str.

69. Cornell, J. M. (1872). Improvement in machines for shearing the ends of beams. *United States Patent Office, št. patenta: 5097*, 4 str.

70. Correia Baptista Soares de Mello, J. C. (2001). Um caso de estudo de integração SIG-DEA-MCDA: A influência de uma instituição de ensino superior em vários municípios do estado do Rio de Janeiro. *Investigação Operacional, 21*(2).

71. Correia, M. H., Oliveira, J. F., & Ferreira, J. S. (2012). Integrated resolution of assignment, sequencing and cutting problems in paper production planning. *International Journal of Production Research, 50*(18), str. 5195-5212.

72. Crowther, J. G., & Whiddington, R. (1947). *Science at War* (Prva izdaja. izd.). London: HMSO, 185 str.

73. Cui, Y., Gu, T., & Hu, W. (2009). A cutting-and-inventory control problem in the manufacturing industry of stainless steel wares *Omega, 37*(4), str. 864-875.

74. Cui, Y., Yang, L., & Chen, Q. (2013). Heuristic for the rectangular strip packing problem with rotation of items. *Computers & Operations Research, 40*(4), str. 1094–1099.

75. Cui, Y., & Yang, Y. (2010). A heuristic for the one-dimensional cutting stock problem with usable leftover. *European Journal of Operational Research, 204*(2), str. 245-250.

76. Cussens, J. (Ed.) (2011) Encyclopedia of Machine. New York: Springer Science + Business Media. 1030 str.

77. Dantzig, G. B. (1957). Discrete-Variable Extremum Problems. *Operations Research, 5*(2), str. 266–288.

78. Dantzig, G. B., & Thapa, M. N. (1997). *Linear programming 1: Introduction*: Springer, 480 str.

79. Dantzig, G. B., & Thapa, M. N. (2003). *Linear programming 1: Theory and Extensions*: Springer, 480 str.

80. Dell'Amico, M., Díaz, J. C. D., & Iori, M. (2012). The Bin Packing Problem with Precedence Constraints. *Operations Research, 60*(6), str. 1491-1504

81. DiMaggio, P. A. J., Young, N. L., Richard C. Baliban, Garcia, B. A., & Floudas, C. A. (2009). A Mixed Integer Linear Optimization Framework for the Identification and Quantification of Targeted Post-translational Modifications of Highly modified Proteins Using Multiplexed Electron Transfer Dissociation Tandem Mass Spectrometry. *Molecular & Cellular Proteomics, 8*, str. 2527-2543.

82. Dollevoet, T., & Huisman, D. (2011). Fast Heuristics for Delay Management with Passenger Rerouting *Econometric Institute and ECOPT, Erasmus University Rotterdam*, str. 1-19.

83. Dou, P., Kimura, A., Okuda, T., Inoue, M., Ukai, S., Ohnuki, S., Fujisawa, T., & Abe, F. (2011a). Effects of extrusion temperature on the nano-mesoscopic structure and mechanical properties of an Al-alloyed high-Cr ODS ferritic steel. *Journal of Nuclear Materials, 417*(1-3), str. 166-170.

84. Dou, P., Kimura, A., Okuda, T., Inoue, M., Ukai, S., Ohnuki, S., Fujisawa, T., & Abe, F. (2011b). Polymorphic and coherency transition of Y–Al complex oxide particles with extrusion temperature in an Al-alloyed high-Cr oxide dispersion strengthened ferritic steel. *Acta Materialia, 59*(3), str. 992-1002.

85. Dougherty, A. (1862). Improvement in paper-cutting machines. *United States Patent Office, št. patenta: 35592,* 4 str.

86. Drake, M. J., Gerde, V. W., & Wasielski, D. M. (2011). Socially responsible modeling: a stakeholder approach to the implementation of ethical modeling in operations research. *Operations Research Spectrum, 33*(1), str. 1-26.

87. Dusek, V. (2006). *Philosophy of technology. An introduction.* (Vol. 1). Oxford: Blackwell Publishing lTD, 249 str.

88. Dyckhoff, H. (1981). A New Linear Programming Approach to the Cutting Stock Problem. *Operations Research, 29*(6), str. 1092-1104.

89. Dyckhoff, H. (1990). A Typology of Cutting and Packing Problems. *European Journal of Operational Research, 44,* str. 145-159.

90. Edelkamp, S., & Schrödl, S. (2011). *Heuristic Search: Theory and Applications*. Waltham, Massachusetts: Morgan Kaufmann Publishers, 712 str.

91. Edmonds, J. (1965). Paths, trees and owers *Canadian Journal of Mathematics, 17,* str. 449–467.

92. Eiselt, H. A., Pederzoli, G., & Sandblom, C.-L. (1987). *Continuous optimization models*: W. de Gruyter, 730 str.

93. Eismann, K. (1958). The trim problem. *Management Science, 3,* str. 279-284.

94. Eley, M. (2003). A bottleneck assignment approach to the multiple container loading problem. *OR Spectrum, 25,* str. 45-60.

95. Erjavec, J., Gradišar, M., & Trkman, P. (2009). Renovation of the cutting stock process. *International Journal of Production Research, 47*(14), str. 3979-3996.

96. Erkkilä, I., Moisio, J., Reinius, R., & Säynevirta, S. (2008). A method for creating an optimal cutting plan for a strip-like material. *European Patent Office, št. patenta: EP 1956456 A1*.

97. Faramawi, M. M., & Regan, K. W. (2008). Landscape of computational commplexity: State University of New York at Buffalo, Department of computer science & engineering.

98. Farley, A. (1983a). A note on modifying a two-dimensional trim-loss algorithm to deal with cutting restrictions. *European Journal of Operational Research, 14*(4), str. 393-395.

99. Farley, A. (1983b). Trim-loss pattern rearrangement and its relevance to the flat-glass industry. *European Journal of Operational Research, 14*(4), str. 386-392.

100. Farley, A. (1988a). Mathematical Programming Models for Cutting-Stock Problems in the Clothing Industry. *The Journal of the Operational Research Society, 39*(1), str. 41-53.

101. Farley, A. (1988b). Practical adaptations of the Gilmore-Gomory approach to cutting stock problems. *Operations-Research-Spektrum, 10*(2), str. 113-123.

102. Farley, A. (1990). The cutting stock problem in the canvas industry. *European Journal of Operational Research, 44*(2), str. 247-255.

103. Farley, A., & Richardson, K. V. (1984). Fixed charge problems with identical fixed charges. *European Journal of Operational Research, 18*(2), str. 245-249.

104. Fathi, Y., & Kianfar, K. (2012). An efficient model for the crosscut optimisation problem in a wood processing mill. *International Journal of Production Research, 50*(2), str. 485-497.

105. Fereday, J., & Muir-Cochrane, E. (2006). Demonstrating Rigor Using Thematic Analysis: A Hybrid Approach of Inductive and Deductive Coding and Theme Development. *International Journal of Qualitative Methods, 5*(1), str. 1-11.

106. Finnerty, J. D. (1988). Financial Engineering in Corporate Finance: An Overview. *A special Issue on Financial Engineering, 17*(4), str. 14-33.

107. Fortnow, L. (2009). The history and status of the P versus NP question. *Communications of the ACM, 52*(9).

108. Fu, J.-F., Fenton, R. G., & Cleghorn, W. L. (1991). A mixed integer-discrete-continuous programming method and its application to engineering design optimization. *Engineering Optimization, 17*(4), str. 263-280.

109. Fu, Z., Huang, W., & Lü, Z. (2013). Iterated tabu search for the circular open dimension problem. *European Journal of Operational Research, 225*(2), str. 236-243.

110. Furini, F., Malaguti, E., Durán, R. M., Persiani, A., & Toth, P. (2012). A column generation heuristic for the two-dimensional two-staged guillotine cutting stock problem with multiple stock size. *European Journal of Operational Research, 218*(1), str. 251–260.

111. Fusco, G., & Caglioni, M. (2011). *Hierarchical clustering through spatial interaction data. The case of commuting flows in south-eastern France.* Paper presented at the Computational Science and Its Applications - ICCSA 2011. Conference Proceedings., Santander, Spain, str. 135 - 151.

112. Gage, J. P. (1848). Improvement in machinery for anding paper. *United States Patent Office, št. patenta: 5443*, 4 str.

113. Galitsky, B., & Pampapathi, R. (2003). Deductive and Inductive Reasoning for Processing the Claims of Unsatisfied Customers *Lecture Notes in Computer Science, 2718*, str. 199-218.

114. Galitz, L. (1995). *Financial Engineering: Tools and Techniques to Manage Financial Risk*. London: Pitman Publishing, 516 str.

115. Garey, M. R., & Johnson, D. S. . (1979). *Computers and intractability*. San Francisco, California, ZDA: Freeman, 338 str.

116. Garey, M. R., & Johnson, D. S. (1979). *Computers and Intractability: A Guide to the Theory of NP-Completeness*: W. H. Freeman.

117. Gass, S. I. (1985). *Linear programming methods and applications*. New York: McGraw-Hill, 532 str.

118. Gattei, S. (2009). Proof versus sound interference. V Z. Parusniková & R. S. Cohen (Eds.), *Rethinking Popper*: Springer Science + Business Media B. V., str. 63-71.

119. Gau, T., & Wäscher, G. (1995). CUTGEN1: A problem generator for the standard one-dimensional cutting stock problem. *European Journal of Operational Research, 84*(3), str. 572–579.

120. Gazder, A. A., Hazra, S. S., Gu, C. F., Cao, W. Q., Davies, C. H. J., & Pereloma, E. V. (2010). Mechanical, microstructure and texture properties of interstitial-free steel and copper subjected to equal channel angular extrusion and cold-rolling. *Journal of Physics: Conference Series, 240*(1), str. 1742-1765.

121. Ghavami, B. (2000). Cigar plug cutting apparatus. *United States Patent Office, št. patenta: 6026574*, 13 str.

122. Gilmore, P. C., & Gomory, R. E. (1960). A Linear Programming Approach to the Cutting-Stock Problem. *Operations Research, 9*(6), str. 849-859.

123. Gilmore, P. C., & Gomory, R. E. (1963). A Linear Programming Approach to the Cutting Stock Problem—Part II. *Operations Research, 11*(6), str. 863-888.

124. Gilmore, P. C., & Gomory, R. E. (1964). Sequencing a One State-Variable Machine: A Solvable Case of the Traveling Salesman Problem. *Operations Research, 12*(5), str. 655-679.

125. Gilmore, P. C., & Gomory, R. E. (1965a). Multistage Cutting Stock Problems of Two and More Dimensions. *Operations Research, 13*(1), str. 94-120.

126. Gilmore, P. C., & Gomory, R. E. (1965b). Multistage Cutting Stock Problems of Two and More Dimensions. *Operations Research, 13*(1), str. 94-120.

127. Gilmore, P. C., & Gomory, R. E. (1966). The Theory and Computation of Knapsack Functions. *Operations Research, 14*(6), str. 1045-1074

128. Gluhov, V. (2013). *Менеджмент: Учебник для вузов*, 608 str.

129. Godfrey-Smith, P. (2003). *Theory and Reality: An Introduction to the Philosophy of Science (Science and Its Conceptual Foundations series)*. Chicago: University Of Chicago Press, 272 str.

130. Golfeto, R. R., Moretti, A. C., & Neto, L. L. D. S. (2012). INTELCSP: computational intelligence applied to cutting stock problems. *International Journal of Computational Intelligence Studies, 1*(4), str. 312-321.

131. Gomory, R. (1960). *An algorithm for the mixed integer problem.*: Rand Corp Santa Monica CALIF, 14 str.

132. Gonçalves, J. F., & Resende, M. G. C. (2012). A parallel multi-population biased random-key genetic algorithm for a container loading problem. *Computers & Operations Research, 39*(2), str. 179–190.

133. Gradišar, M., Erjavec, J., & Tomat, L. (2011). One-Dimensional Cutting Stock Optimization with Usable Leftover: A Case of Low Stock-to-Order Ratio. *International Journal of Decision Support System Technology (IJDSST), 3*(1), 13 str.

134. Gradišar, M., Jesenko, J., & Resinovič, G. (1997). Optimization of roll cutting in clothing industry. *Computers & Operations Research, 24*(10), str. 945-953.

135. Gradišar, M., Kljajić, M., Resinovič, G., & Jesenko, J. (1999). A sequential heuristic procedure for one-dimensional cutting. *European Journal of Operational Research, 114,* str. 557–568.

136. Gradišar, M., & Resinovič, G. (2000). Оценка алгоритмов для решения задачи одномерного раскроя. 14 str.

137. Gradišar, M., Resinovič, M., & G., K. (2002). Evaluation of algorithms for one-dimensional cutting. *Computers & Operations Research Policy, 29,* str. 1207–1220.

138. Gradišar, M., & Tomat, L. (2012, 14-17.7.2012). *The cutting stock problem and excessive accumulation of usable leftovers.* Paper presented at the Recent researches in circuits and systems : proceedings of the 16th WSEAS International Conference on Circuits, proceedings of the 16th WSEAS International Conference on Systems, Kos, Grčija, str. 411-414.

139. Gradišar, M., & Tomat, L. (2013). Vračanje uporabnih ostankov na zalogo. Osebna komunikacija.

140. Gradišar, M., & Trkman, P. (2005). A combined approach to the solution to the general one-dimensional cutting stock problem. *Computers & Operations Research, 32*(7), str. 1793–1807.

141. Gradišnik, M. (2012). Železarna Metal Ravne d.o.o. (osebna komunikacija 28.2.2012).

142. Grandjean, E. (1996). Sorting, linear time and the satisfiability problem. *Annals of Mathematics and Artificial Intelligence, 16*(1), str. 183-236.

143. Granville, A. (2004). It is easy to determine whether a given integer is prime. *Bulletin (New Series) of the American Mathematical Society, 42*(1), str. 3-38.

144. Haigh, J. (2002). *Probability models*. Berlin, Heidelberg: Springer Science+Business Media, 256 str.

145. Hamilton, D. H. T. B. D. O. K. (2001). The changing composition of innovative activity in the US — a portrait based on patent analysis. *Research Policy, 30*(4), str. 681-703.

146. Hammond, D. (1894). Shape-metal-cutting machine. *United States Patent Office, št. patenta: 516735*, 4 str.

147. Hansson, S., & Jansson, T. (2010). Sensitivity analysis of a finite element model for the simulation of stainless steel tube extrusion. *Journal of Materials Processing Technology, 210*(10), str. 1386-1396.

148. Harland, C. M. (1999). Supply Chain Management, Purchasing and Supply Management, Logistics, Vertical Integration, Materials Management and Supply Chain Dynamics. V N. Slack (Ed.), *The Blackwell Encyclopedia of Management and Encyclopedic Dictionaries, The Blackwell Encyclopedic Dictionary of Operations Management* (Vol. 10, pp. 256 str.): John Wiley & Sons.

149. Haruvy, E., & Stahl, O. D. (2004). Deductive versus inductive equilibrium selection: experimental results. *Journal of Economic Behavior & Organization, 53*(3), str. 319-331

150. Hashimoto, Y., Ito, T., Ohnishi, T., Takayasu, M., Takayasu, H., & Watanabe, T. (2010). Random walk or a run. Market microstructure analysis of foreign exchange rate movements based on conditional probability. *Quantitative Finance* sprejet v objavo.

151. Hatch, J. (1869). Improvement in paper-cutting machinery. *United States Patent Office, št. patenta: 91742*, 4 str.

152. Heckmann, P., Shorten, D., & Engel, H. (2003). *Supply Chain Management at 21: The Hard Road to Adulthood*. New York, USA.: Booz Allen Hamilton Inc.

153. Heis, A. (2007). *Um algoritmo evolutivo para o problema de corte de estoque unidimensional inteiro (magistrska disertacija)*. Maringá: Ciência da Computação da Universidade Estadual de Maringá, 107 str.

154. Hiller, F. S., & Lieberman, G. J. (2002). *Introduction to Operations Research*. New York: McGraw-Hill Science/Engineering/Math; 7. izdaja, 1214 str.

155. Hochbaum, D. S. (1997). *Approximation algorithms for NP-hard problems*: PWS Publishing Company, 596 str.

156. Hodge, J. N. (1861). Machine for sawing and cutting wood. *United States Patent Office, št. patenta: 32945*, 4 str.

157. Höfer, M. (2006). Non-cooperative Facility Location and Covering Games. *Algorithms and Computation Lecture Notes in Computer Science 4288*, str. 369-378.

158. Holley, J. (2005). Obituaries of George Dantzig. *Washington Post, May 19, 2005*.

159. Holthaus, O. (2002). Decomposition approaches for solving the integer one-dimensional cutting stock problem with different types of standard lengths. *European Journal of Operational Research, 141*(2), str. 295-312.

160. Homer, S., & Selman, A. L. (2011). Introduction to Complexity Theory. *Computability and Complexity Theory Texts in Computer Science* str. 75-80.

161. Honhon, D., Gaur, V., & Seshadri, S. (2010). Assortment Planning and Inventory Decisions Under Stockout-Based Substitution. *Operations Research, 58*(5), str. 1364-1379.

162. Hopcroft, J. E. (2000). *Introduction to Automata Theory, Languages, and Computation (2nd Edition)*. Boston: : Addison-Wesley, 521 str.

163. Horn, J. (2007). System and method to solve shape nesting problems. *United States Patent Office, št. patenta: 7181702.*

164. Horowitz, E., & Sahni, S. (1974). Computing Partitions with Applications to the Knapsack Problem. *Journal of the ACM (JACM), 21*(2), str. 277-292.

165. Iori, M., Salazar-González, J.-J., & Vigo, D. (2007). An Exact Approach for the Vehicle Routing Problem with Two-Dimensional Loading Constraints. *Transportation Science, 41*(2).

166. Iqbal, A. (2010). What computer chess still has to teach us: The game that will not go. *Electronic journal of computer science and information tehnology (eJCSIT), 2*(1), str. 23 - 29.

167. Jahromi, M. H., Tavakkoli-Moghaddam, R., Makui, A., & Shamsi, A. (2012). *Solving an one-dimensional cutting stock problem by simulated annealing and tabu search*: Springer, 712 str.

168. Jain, V. (2008). A combined approach to the solution to the general one-dimensional cutting stock problem. *Osebna komunikacija*.

169. Javanshir, H., Rezaei, S., Najar, S. S., & Ganji, S. S. (2010). Two-dimensional cutting stock management in fabric industries and optimizing the large object's length. *IJRRAS*, 7 str.

170. Jepsen, M., Spoorendonk, S., & Ropke, S. (2012). A Branch-and-Cut Algorithm for the Symmetric Two-Echelon Capacitated Vehicle Routing Problem. *Transportation Science, Online izdaja pred natisom.*

171. Jevons, W. S. (2010). *Studies in Deductive Logic - A Manual for Students*. Charleston: Nabu Press, 336 str.

172. Jeyakumar, V., & Rubinov, A. M. (2005). *Continuous Optimization: Current Trends and Modern Applications* (izdaja 2005. izd.): Springer, 468 str.

173. Jin-chun, T., & Pei-zhen, W. (2012). Optimization of Steel Ingot Cutting and Matching Based on Genetic Algorithm. *Journal of Anhui University of Technology (Natural Science).*

174. Jolly, W. D., & Singh, G. (1987). Method and apparatus for cutting metal plate. *European Patent Office, št. patenta: EP0129952 B1*.

175. Junqueira, L., Morabito, R., & Yamashita, D. S. (2012). Three-dimensional container loading models with cargo stability and load bearing constraints. *Computers & Operations Research. Special Issue on Knapsack Problems and Applications, 39*(1), str. 74–85.

176. Kahrs, L. A. (2009). *Bildverarbeitungsunterstützte Laserknochenablation am humanen Felsenbein*: KIT Scientific Publishing, 161 str.

177. Kantorovič, L. V. (1939). *Математические методы организации и планирования производства* (Vol. 1), 67 str.

178. Kantorovič, L. V. (1960). Mathematical Methods of Organizing and Planning Production. *INFORMS Journal on Computing, 6*(4), str. 366-422.

179. Kantorovič, L. V., & Zalgaller, V. A. (1971). *Рациональный раскрой промышленных материалов* (2. izd.). Novosibirsk: Nauka, 300 str.

180. Karp, R. M. (1972). Reducibility Among Combinatorial Problems. V R. E. Miller & J. W. Thatcher (Eds.), *Complexity of Computer Computations* (str. 85–103). New York: Plenum.

181. Keane, J. (1838). Machine for cutting wood-screws. *United States Patent Office, št. patenta: 830*, 4 str.

182. Kennedy, J. (1889). Machine for cutting flanged beams. *United States Patent Office, št. patenta: 395569*, 4 str.

183. Khačian, L. G. (1979). Полиномиальный алгоритм в линейном программировании. *Доклады Акад. Наук СССР, 244*(5), str. 1093-1096.

184. Khanafer, A., Clautiaux, F., & Talbi, E.-G. (2012). Tree-decomposition based heuristics for the two-dimensional bin packing problem with conflicts. *Computers & Operations Research. Special Issue on Knapsack Problems and Applications, 39*(1), str. 54-63.

185. Koch, S. (2012). *Logistik: Eine Einführung in Ökonomie und Nachhaltigkeit*. Frankfurt: Springer Vieweg, 348 str.

186. Köhler, J. (1890). Machine for cutting I-beams or channel-bars. *United States Patent Office, št. patenta: 438252*, 4 str.

187. Korbutas, A., & Finkelštejn, J. J. (1969). *Дискретное программирование*: Наука, str. 386.

188. Korte, B. B. H., & Vygen, J. (2012). *Combinatorial Optimization. Theory and algorithms.* (5. izd.). Heidelberg: Springer 659 str.

189. Kovačič, M. (2011). Genetski algoritmi. Predavanja in privatna komunikacija. Štore Steel.

190. Kovačič, M., & Šarler, B. (2009). Application of the Genetic Programming for Increasing the Soft Annealing Productivity in Steel Industry. *Materials and Manufacturing Processes 24*(3), str. 369-374.

191. Kumar, R. S., C.Narasimham, & Setty, S. P. (2012). Lattice based tools in cryptanalysis for public key cryptography. *International Journal of Network Security & Its Applications (IJNSA), 4*(2), str. 155-162.

192. Kunegis, J. (2006). *Using Integer Linear Programming for Search Results Optimization*. Berlin: Fakultät IV der Technischen Universität Berlin, 77 str.

193. Kuruppu, S., Beresford-Smith, B., Conway, T., & Zobel, J. (2102). Iterative Dictionary Construction for Compression of Large DNA Data Sets. *IEEE/ACM Transactions on Computational Biology and Bioinformatics (TCBB), 9*(1), str. 137-149.

194. Kusiak, A., & Heragu, S. S. (1987). The facility layout problem. *European Journal of Operational Research, 29*, str. 229-251.

195. Lampinen, J., & Zelinka, I. (1999). *Mixed integer-discrete-continuous optimization by differential evolution.* Paper presented at the Proceedings of MENDEL'99, 5th International Mendel Conference on Soft Computing, Brno, Czech Republic, str. 71-76.

196. Laudon, K. C., Jane P. Laudon, & Schoder, D. (2010). *Wirtschaftsinformatik* München: Pearson Studium, 1151 str.

197. Leung, S. C. H., Lin, Y., & Zhang, D. (2012). Extended local search algorithm based on nonlinear programming for two-dimensional irregular strip packing problem. *Computers & Operations Research, 39*(3), str. 678–686.

198. Li, H.-L., & Chou, C.-T. (1994). A global approach for nonlinear mixed discrete programming in design optimization. *Engineering Optimization, 22*, str. 109-122.

199. Li, S. (1996). Multi-Job Cutting Stock Problem with Due Dates and Release Dates. *The Journal of the Operational Research Society, 47*(4), str. 490-510.

200. Limeira, M. S. (2005). *Redução do número de padrões em problemas de corte de estoque (doktorska disertacija)*. São José dos Campos, 196 str.

201. Lin, S.-S., Zhang, C., & Wang, H.-P. (1995). On mixed-discrete nonlinear optimization problems: A comparative study. *Engineering Optimization, 23*(4), str. 287–300.

202. Lipton, R. J. (2010). *The P=NP question and Gödel's lost letter*. New York, Dordrecht, Heidelberg, London: Springer Science+Business Media, 239 str.

203. Lirov, Y. V., & Segal, M. (1993). Automated resource allocation cutting stock arrangement using random cut patterns. *United States Patent Office, št. patenta: 5235508*.

204. Lirov, Y. V., & Segal, M. (1999). Automated resource allocation cutting stock arrangement using random cut patterns. *European Patent Office, št. patenta: EP 0459689 B1*.

205. Liuzzi, G., Lucidi, S., & Rinaldi, F. (2012). Derivative-free methods for bound constrained mixed-integer optimization. *Computational Optimization and Applications, 53*(2), str. 505-526.

206. Lodi, A., Martello, S., & Monaci, M. (2002(a)). Two-dimensional packing problems: A survey. *European Journal of Operational Research, 141*(2), str. 241-252.

207. Lodi, A., Martello, S., & Vigo, D. (2002). Recent advances on two-dimensional bin packing problems. *Discrete Applied Mathematics, 123*(1-3), str. 379–396.

208. Lodi, A., Martello, S., & Vigo, D. (2004). Models and Bounds for Two-Dimensional Level Packing Problems. *Journal of Combinatorial Optimization, 8*(3), str. 363-379.

209. Loh, H. T., & Papalambros, P. Y. (1991). A sequential linearization approach for solving mixed-discrete nonlinear design optimization problems. *Transactions of the ASME, Journal of Mechanical Design, 113*(3), str. 325-334.

210. Lu, H.-C., Huang, Y.-H., & Tseng, K.-A. (2013). An integrated algorithm for cutting stock problems in the thin-film transistor liquid crystal display industry. *Computers & Industrial Engineering, 64*(4), str. 1084–1092.

211. Lu, H.-C., Ko, Y.-C., & Huang, Y.-H. (2012). A note on "Reducing the number of binary variables in cutting stock problems". *Optimization Letters*, Članek sprejet v objavo.

212. Lüdecke, M. (1999). *Packungsprobleme unter Toleranzbedingungen*. München: Herbert Utz Verlag, 133 str.

213. Lust, T., & Teghem, J. (2012). The multiobjective multidimensional knapsack problem: a survey and a new approach. *International Transactions in Operational Research, 19*(4), str. 495–520.

214. Lyall, C., Bruce, A., Tait, J., & Meagher, L. (2011). *Interdisciplinary Research Journeys: Practical Strategies for Capturing Creativity*. London & New York: Bloomsbury Academic (natis: Bloomsbury Publishing Plc), 240 str.

215. Lyubashevsky, V., Palacio, A., & Segev, G. (2010). Public-Key Cryptographic Primitives Provably as Secure as Subset Sum. *Theory of Cryptography Lecture Notes in Computer Science 5978*, str. 382-400.

216. MacKenzie, D. (2006). *An engine, not a camera. How financial models shape markets*. Cambridge, Massachusetts & London: The MIT Press, 377 str.

217. Magdziarz, M., Weron, A., Burnecki, K., & Klafter, J. (2009). Fractional Brownian Motion Versus the Continuous-Time Random Walk: A Simple Test for Subdiffusive Dynamics. *Physical Review Letters, 103*(18), id:180602.

218. Mahajan, R., Chopra, S., & Jindal, S. (2012). Comparison of Deterministic and Probabilistic Approaches for Solving 0/1 Knapsack Problem. *Advances in Computer Science, Engineering & Applications Advances in Intelligent and Soft Computing, 166*, str. 629-637

219. Manrique, J. D., Al-Hussein, M., Bouferguene, A., Safouhi, H., & Nasseri, R. (2011). Combinatorial Algorithm for Optimizing Wood Waste in Framing Designs. *Journal of Construction Engineering and Management, 137*(3), str. 188–197.

220. Markov, A. (1971). Extension of the Limit Theorems of Probability Theory to a Sum of Variables Connected in a Chain. V H. R. (Ed.), *Dynamic Probabilistic Systems (Volume I: Markov Models)* (str. 552-577): John Wiley and Sons.

221. Marolt, M. (2011). Štore Steel d.o.o. (osebna komunikacija, 3.11.2011).

222. Martello, S., Monaci, M., & Vigo, D. (2003). An Exact Approach to the Strip-Packing Problem. *INFORMS Journal on Computing, 15*(3), str. 310-319.

223. Martello, S., & Toth, P. (1977). An upper bound for the zero-one knapsack problem and a branch and bound algorithm. *European Journal of Operational Research, 1*(3), str. 169–175.

224. Martello, S., & Toth, P. (1978). Algorithm 37 Algorithm for the solution of the 0–1 single knapsack problem. *Computing, 21*(1), str. 81-86.

225. Martello, S., & Toth, P. (1990). Lower bounds and reduction procedures for the bin packing problem. *Discrete Applied Mathematics, 28*(1), str. 59-70.

226. Maruyama, F., Minoda, Y., Sawada, S., Takizawa, Y., & Yoshida, H. (1991). A combination problem solving apparatus. *European Patent Office, št. patenta: EP 0486037 A2*.

227. Masahiro, S., Hiroyuki, I., & Uiterwijk, J. W. H. M. (2001). The PN source-search algorithm: Application to tsume-shogi. *Artificial Intelligence, 129*(1-2), str. 253-277.

228. Masouz, A.-K., Slutzky, G. D., Hall, E. L., Shell, R. L., & Huston, R. L. (1992). Method and apparatus for palletizing randomly arriving mixed size and content parcels. *United States Patent Office, št. patenta: 5175692.*

229. Mathews, G. B. (1897). On the partition of numbers. *Proceedings of the London Mathematical Society, 28*, str. 486-490.

230. Mayr, E. W. (1996). Some Complexity Results for Polynomial Ideals. *Journal of complexity, 13,* str. 303-325.

231. McCloskey, F. J., & Trefethen, N. F. (1954). *Operations Research for Management* (Vol. 1). Baltimore, Maryland: Johns Hopkins Press, 563 str.

232. McDermott, J. (1982). R1: A rule-based configurer of computer systems. *Artificial Intelligence, 19*(1), str. 39-88.

233. McPherson, S., & Ortega, A. (2011). *Detecting low-rate periodic events in Internet traffic using renewal theory*. Paper presented at the 2011 IEEE International Conference on Acoustics, Speech and Signal Processing (ICASSP).

234. Medvedev, S. N. (2011). Об устойчивости интервальной задачи о назначениях . *Вестник Воронежского института фсин России., 1*, str. 37-41.

235. Mei, Y. (2012). The Clustering NIGA for Solving the Nesting Problem in the Hull Construction Automatic Nesting System. *Advances in Mechanical and Electronic Engineering. Lecture Notes in Electrical Engineering, 176*, str. 79-84.

236. Meller, R. D., & Gau, K.-Y. (1996). The facility layout problem: Recent and emerging trends and perspectives. *Journal of Manufacturing Systems, 15*(5), str. 351–366.

237. Merry, B., Gain, J., & Marais, P. (2013). Accelerating kd-tree searches for all k-nearest neighbours. *Technical report, (Članek sprejet v objavo)*.

238. Mittelstadt, B., & Park, Y. (2013). Method and apparatus for generating a tool path for a robotic orthopedic surgical procedure. *United States Patent Office, št. patenta: US 201300035690 A1*.

239. Mobasher, A., & Ekici, A. (2013). Solution approaches for the cutting stock problem with setup cost. *Computers & Operations Research, 40*(1), str. 225–235.

240. Möller, K. (2006). *Wertschöpfung in Netzwerken*. München: Verlag Franz Vahlen GmbH, 273 str.

241. Muñoz, M. A., Kirley, M., & Halgamuge, S. K. (2013). The Algorithm Selection Problem on the Continuous Optimization Domain. *Computational Intelligence in Intelligent Data Analysis Studies in Computational Intelligence, 445*, str. 75-89.

242. Muritiba, A. E. F., Iori, M., Malaguti, E., & Toth, P. (2010). Algorithms for the Bin Packing Problem with Conflicts. *INFORMS Journal on Computing 22*(3), str. 401-415.

243. Murty, K. G. (1983). *Linear programming*. New York: John Wiley & Sons, Inc.

244. Nash Jr., J. F. (1950). The bargaining problem. *Econometrica, 18*(2), str. 155-162.

245. Nauss, R. M. (1976). An Efficient Algorithm for the 0-1 Knapsack Problem. *Management Science, 23*(2), str. 27-31.

246. Nemhauser, G. L., & Wolsey, L. A. (1988). *Integer and combinatorial optimization*: Wiley.

247. Nicolai, A., & Seidl, D. (2010). That's Relevant! Different Forms of Practical Relevance in Management Science. *Organization Studies, 31*(9-10), str. 1257-1285.

248. Norros, I. (1995). On the use of fractional Brownian motion in the theory of connectionless networks *IEEE Journal on Selected Areas in Communications, 13*(6), str. 953 - 962. .

249. Ntene, N., & Vuuren, J. H. v. (2009). A survey and comparison of guillotine heuristics for the 2D oriented offline strip packing problem. *Discrete Optimization, 6*(2), str. 174–188.

250. O'Connor, J. L. d. l. F. (1998). *Técnicas de Cálculo para Sistemas de Ecuaciones, Programación Lineal y Programación Entera*. Barcelona: Editorial Reverté, S.A., str. 933.

251. O'Regan, G. (2013). Computability and Decidability. *Mathematics in Computing*, str. 191-200.

252. Oakman, R. N., Jr. (1882). Turner's Falls, Massachusetts, USA Patent No. 260117.

253. Ohlsson, M. N. (2012). Controlling rules and variables for cutting. *European Patent Office, št. patenta: EP 2485864 A1*.

254. Ottmann, T., & Widmayer, P. (2012). Weitere Algorithmenentwurfstechniken. *Algorithmen und Datenstrukturen*, str. 445-469.

255. Özcan, E., Kai, Z., & Drake, J. H. (2013). Bidirectional best-fit heuristic considering compound placement for two dimensional orthogonal rectangular strip packing. *Expert Systems with Applications, 40*(10), str. 4035-4043.

256. Page, L., Brin, S., Motwani, R., & Winograd, T. (1999). The PageRank Citation Ranking: Bringing Order to the Web. *Stanford InfoLab*.

257. Pagourtzis, A., & Zachos, S. (2006). The Complexity of Counting Functions with Easy Decision Version. V *Mathematical Foundations of Computer Science 2006. Lecture Notes in Computer Science*. *4162*, str. 741-752).

258. Papadimitriou, C. H. (1994). *Computational Complexity*: Addison-Wesley, 532 str.

259. Papadimitriou, C. H., & Steiglitz, K. (1998). *Combinatorial Optimization : Algorithms and Complexity*: Dover Pubns, 528 str.

260. Papoulis, A., & Pillai, S. U. (2001). *Probability, Random Variables and Stochastic Processes with Errata Sheet* (Vol. 4). New York: McGraw-Hill Science/Engineering/Math, 304 str.

261. Park, D.-R., & Kim, Y.-H. (2013). Method and apparatus for processing medical image, and robotic surgery system using image guidance. *European Patent Office, št. patenta: EP 2554137 A2*.

262. Park, K. T., Kim, H., Lee, S., Lee, H.-K., Ryu, J.-h., & Lee, I.-B. (2013). MINLP formulations for solving strip packing problems in LCD mother glass production. *Computers & Chemical Engineering, 48*(10), str. 312-324.

263. Park, K. T., Ryu, J.-H., Lee, H.-K., & Lee, I.-B. (2013). Developing a heuristics for glass cutting process optimization: A case of two-dimensional two-stage guillotine cutting with multiple stock sizes. *Korean Journal of Chemical Engineering, 30*(2), str. 278-285.

264. Peitgen, H.-O., Jürgens, H., & Saupe, D. (2004). *Chaos and fractals: new frontiers of science*. New York: Springer, 877 str.

265. Pinedo, M. L. (2012). *Scheduling: Theory, Algorithms, and Systems* (4. izd.). New York: Springer Science+Business Media, 673 str.

266. Podobnik, B., Valentinčič, A., Horvatić, D., & Stanley, H. E. (2011). Asymmetric Lévy flight in financial ratios. *Proceedings of the National Academy of Sciences, 108*(44), str. 17883-17888.

267. Polanc, B. (2012). Acroni d.o.o. (Železarna Jesenice) (osebna komunikacija 12.3.2012).

268. Potter, J. A. (1892). Art of and machine for cutting flanged beams. *United States Patent Office, št. patenta: 485981*, 4 str.

269. Puchinger, J., Raidl, G. u. R., & Pferschy, U. (2010). The Multidimensional Knapsack Problem: Structure and Algorithms. *INFORMS Journal on Computing 22*(2), str. 250-265.

270. Ravelo, S. V., Meneses, C. N. d., & Santos, M. O. d. (2011). Mathematical Programming Models for the one-dimensional cutting stock problem with usable leftover. *SBPO, 62*(1), 11 str.

271. Read, C. O. (1837). Improved machine for manufacturing wood-screws. *United States Patent Office, št. patenta: 516*, 4 str.

272. Reggiani, B., Donati, L., Zhou, J., & Tomesani, L. (2010). The role of creep and fatigue in determining the high-temperature behaviour of AISI H11 tempered steel for aluminium extrusion dies. *Journal of Materials Processing Technology, 210*(12), str. 1613-1623

273. Ren, C. Y. (2013). Fast Tabu Search Algorithm for Solving Multi-Vehicle and Multi-Cargo loading Problem. *Advanced Materials Research, 655-657*, str. 2397-2400.

274. Renegar, J. (1987). A polynomial-time algorithm, based on Newton's method, for linear programming *Mathematical programming, 40*(1-3), str. 59-93.

275. Rijurekha Sen, Abhinav Maurya, Bhaskaran Raman, Rupesh Mehta, Ramakrishnan Kalyanaraman, Nagamanoj Vankadhara, Swaroop Roy, & Sharma, P. (2012). *Kyun Queue: A Sensor Network System To Monitor Road Traffic Queues.* Paper presented at the SenSys 2012, Toronto, Kanada, 14 str.

276. Ríos , S. I. (1956). Métodos y problemas de la investigación operativa. *Trabajos de Estadística y de Investigación Operativa, 7*(2), str. 187-198.

277. Ristau, B. (2010). *Informationstechnik. Entwurfsraumexploration heterogener Multi-Prozessor-Systeme*. Dresden: Vogt, 110 str.

278. Roise, G. J. (2011). System and method for cutting-stock optimization across schedules and batches. *United States Patent Office, št. patenta: 8010216.*

279. Rowe, A. P. (1948). *One story of radar*. Cambridge: University Press, 207 str.

280. Rudek, R., Rudek, A., & Kozik, A. (2013). The solution algorithms for the multiprocessor scheduling with workspan criterion. *Expert Systems with Applications, 40*(8), str. 2799–2806.

281. Rudinger, K., Gamble, J. K., Bach, E., Friesen, M., Wellons, M., Joynt, R., & Coppersmith, S. N. (2012). Noninteracting multiparticle quantum random walks applied to the graph isomorphism problem for strongly regular graphs. *Physical Review Letters, 86*(2).

282. Ruiz, E. D. N. (2012). *Optimización combinatoria*: Editorial Académica Española, 228 str.

283. Sahni, S. (1975). Approximate Algorithms for the 0/1 Knapsack Problem. *Journal of the ACM (JACM), 22*(1), str. 115-124.

284. Sandgren, E. (1990). Nonlinear integer and discrete programming in mechanical design optimization. Transactions of the ASME,. *Journal of Mechanical Design, 112*(2), str. 223-229.

285. Sandholm, T., Gilpin, A., & Conitzer, V. (2005). *Mixed-Integer Programming Methods for Finding Nash Equilibria*. Paper presented at the National Conference on Artificial Intelligence.

286. Santos, A., Teixeira, J. M., Farias, T., Teichrieb, V., & Kelner, J. (2012). Understanding the Efficiency of kD-tree Ray-Traversal Techniques over a GPGPU Architecture. *International Journal of Parallel Programming, 40*(3), str. 331-352.

287. Sauer, M. (2009). *Operations Research kompakt* München: Oldenbourg, 204 str.

288. Schade, K. (2012). *Stochastische Optimierung. Bestandsoptimierung in mehrstufigen lagernetzwerken.* Wiesbaden Springer Fachmedien Wiesbaden GmbH, 180 str.

289. Scheithauer, G. (2008). *Zuschnitt- und Packungsoptimierung. Problemstellungen, Modellierungstechniken, Lösungsmethoden* (Vol. 1). Wiesbaden: Vieweg + Teubner Verlag, 338 str.

290. Scheithauer, G., & Terno, J. (1995). A Branch&Bound Algorithm For Solving One-Dimensional Cutting Stock Problems Exactly. *Applicationes Mathematicae, 23*(2), str. 151-167.

291. Scheithauer, G., & Terno, J. (1996). Auftragsoptimierung bei Zuschnitt-und Packungsproblemen als ganzzahliges lineares Optimierungsmodell. *Wissenschaftliche Zeitschrift der Technischen Universität Dresden, 45*(6), str. 44-48.

292. Scholl, A. (2001). *Robuste Planung Und Optimierung. Grundlagen Konzepte und Methoden Experimentelle Untersuchungen*. Heidelberg: Physica-Verlag, 413 str.

293. Sellick, T. (1838). Improvement in machines for cutting wood and other screws. *United States Patent Office, št. patenta: RE2*, 4 str.

294. Shachnai, H., & Tamir, T. (2012). Approximation schemes for generalized two-dimensional vector packing with application to data placement. *Journal of Discrete Algorithms, 10,* str. 35-48.

295. Sheldon, G. H. (1896). Machine for cutting off I-beams. *United States Patent Office, št. patenta: 552784*, 4 str.

296. Sheldon, M. R. (1997). *Introduction to probability models.* (Vol. 6. izdaja). Waltham, Massachusetts: Academic Press, 669 str.

297. Sherali, H. D., Bae, K.-H., & Haouari, M. (2010). Integrated Airline Schedule Design and Fleet Assignment: Polyhedral Analysis and Benders' Decomposition Approach. *INFORMS Journal on Computing 22*(4), str. 500 -513.

298. Shimizu, T. (1984). *Pesquisa operacional em engenharia, economia e administraçao: modelos básicos e métodos computacionais*. Rio de Janeiro: Guanabara Dois, 360 str.

299. Silva, E., Alvelos, F., & Carvalho, M. V. d. (2013). Integrating two-dimensional cutting stock and lot-sizing problems. *Journal of the Pperational Research Society, Objavljen na spletu 27.2.2013*.

300. Simão, H. P., Day, J., George, P. A., Gifford, T., Nienow, J., & Powell, W. B. (2009). An Approximate Dynamic Programming Algorithm for Large-Scale Fleet Management: A Case Application. *Transportation Science, 43*(2), str. 178-197.

301. Skiena, S. (1990). *Implementing Discrete Mathematics: Combinatorics and Graph Theory with Mathematica*. Reading, MA: Addison-Wesley, 334 str.

302. Skiena, S. S. (1999). Who is Interested in Algorithms and Why? Lessons from the Stony Brook Algorithms Repository *AGM SIGACT News, 30*(3), str. 65-74.

303. Smale, S. (1998). Mathematical problems for the next century. *Mathematical intelligencer, 20*(2), str. 7-15.

304. Smith, S. R. (1855). Machine for cutting wood into slivers. *United States Patent Office, št. patenta: 12424*, 4 str.

305. Sommereder, M. (2008). *Modellierung von Warteschlangensystemen mit Markov-Ketten : Grundlagen, Konzepte, Methoden*. Saarbrücken: Verlag Dr. Müller, 160 str.

306. SSKJ. (2000). *Slovar slovenskega knjižnega jezika*. Ljubljana: DZS, d.d.

307. Steven A. Gabriel, Sauleh Ahmad Siddiqui, Antonio J. Conejo, & Ruiz, C. (2012). Solving Discretely-Constrained Nash–Cournot Games with an Application to Power Markets. *Networks and Spatial Economics*.

308. Storer, J. A. (2002). *An Introduction to Data Structures and Algorithms*. Birkhäuser Springer, 614 str.

309. Stove, D. C. (1982). How Popper's Philosophy Began. *Philosophy, 57*(221), str. 381-387.

310. Strong, B. M., & Olsen, B. D. (2011). System and method for printing and cutting. *European Patent Office, št. patenta: EP 2313280 A1*.

311. Suwansirikul, C., Friesz, T. L., & Tobin, R. L. (1987). Equilibrium Decomposed Optimization: A Heuristic for the Continuous Equilibrium Network Design Problem. *Transportation Science 21*(4), str. 254-263.

312. Syberfeldt, A., & Lidberg, S. (2012). *Real-world simulation-based manufacturing optimization using Cuckoo search.* Paper presented at the Proceedings of the Winter Simulation Conference. Article #256.

313. Taghipour, H., Rezaei, M., & Esmaili, H. A. (2013). Solving the 0/1 Knapsack Problem by a Biomolecular DNA Computer. *Advances in Bioinformatics, Volume 2013*(Article ID 341419), 6 str.

314. Taha, A. H. (2007). *Введение в исследование операций.*: Williams (Вильямс), 912 str.

315. Tai, A. H., & Ching, W.-K. (2005). On the Use of Renewal Theory in Machine Replacement Models. *International Journal Applied Mathematical Sciences, 2*(2), str. 240-247.

316. Tanida, M. (2009). Tube manufacturing history information management method and device, and manufacturing method using the management method. *European Patent Office, št. patenta: EP 2047934 A1*.

317. Tansey, M., & Stembridge, B. (2005). The challenge of sustaining the research and innovation process. *World Patent Information, 27*(3), str. 212–226.

318. Tate, W. L., Dooley, K. J., & Ellram, L. M. (2011). Transaction Cost and Institutional Drivers of Supplier Adoption of Environmental Practices. *Journal of Business Logistics, 32*(1), str. 6-16.

319. Thierauf, G., & Cai, J. (1997). *Evolution strategies – parallelisation and application in engineering optimization. In B.H.V. Topping (ed.) Parallel and distributed processing for computational mechanics.* Edinburgh (Scotland). : Saxe-Coburg Publications.

320. Trkman, P., & Gradišar, M. (2003). Optimization of the cutting stock process. *Journal of Mechanical Engineering, 49*(9), str. 469-475.

321. Trkman, P., & Gradišar, M. (2007). One-dimensional cutting stock optimization in consecutive time periods. *European Journal of Operational Research, 179*(2), str. 291-301.

322. Truong, T. K., Li, K., & Xu, Y. (2013). Chemical reaction optimization with greedy strategy for the 0–1 knapsack problem. *Applied Soft Computing, 13*(4), str. 1774-1780.

323. Tsuyoshi, H., Keigo, N., Khaled, B., Yousuke, O., Gentaro, M., Tomonari, M., Yuichiro, S., Kiyoshi, O., & Makoto, T. (2010). A novel multiple-walk parallel algorithm for the Barnes–Hut treecode on GPUs – towards cost effective, high performance N-body simulation. *Computer Science - Research and development, 24*(1-2), str. 21-31.

324. Turing, A. (1938). *Correction to: On Computable Numbers, with an Application to the Entscheidungsproblem*. Paper presented at the Proc. London Math. Soc.

325. Vanderbeck, F. (2000). Exact algorithm for minimising the number of setups in the one-dimensional cutting stock problem. *Operations Research, 48*, str. 915-926.

326. Venkateswarlu, P. (2001). The trim-loss problem in a wooden container manufacturing company. *Journal of Manufacturing Systems, 20*(3), str. 166–176.

327. Vidal, R. V. V. (2010). La investigación de operaciones: Un campo multidisciplinario Operational research: a multidisciplinary field. *Peru-Encuentro Cientifico Internacional, 1*(1), str. 47-53.

328. Vijayakumar, B., Parikhh, P. J., Scott, R., Barnes, A., & Gallimore, J. (2013). A dual bin-packing approach to scheduling surgical cases at a publicly-funded hospital. *European Journal of Operational Research, 224*(3), str. 583-591.

329. Vilfan, B. (2011). *Osnovni algoritmi*. Ljubljana: Fakulteta za računalništvo in informatiko, 246 str.

330. Wächter, A., & Biegler, L. T. (2006). On the implementation of an interior-point filter line-search algorithm for large-scale nonlinear programming. *Mathematical programming, 106*(1), str. 25-57.

331. Wagner, H. M. (1959). An integer linear-programming model for machine scheduling. *Naval Research Logistics Quarterly, 6*(2), str. 131-140.

332. Walklate, P. J. (1987). A random-walk model for dispersion of heavy particles in turbulent air flow. *Boundary-layer meteorology, 39*(1-2), str. 175-190.

333. Walter, J. (2009). *Geschäftsprozessmanagement umsetzen: Prozesse am Kunden orientieren, transparent und flexibel gestalten.* München: Carl Hanser Verlag, 327 str.

334. Wang, H., Kochenberger, G., & Glover, F. (2012). A computational study on the quadratic knapsack problem with multiple constraints. *Computers and Operations Research, 39*(1), str. 3-11

335. Wang, S., Liang, Z., Wang, B., Zhang, C., & Rahman, Z. (2007). Precise cutting of single-walled carbon nanotubes. *Nanotechnology, 18*(5).

336. Wäscher, G. (2012). CUTGEN1 and suborders in CSP. *Osebna komunikacija*.

337. Wascher, G., Haussner, H., & Schumann, H. (2007). An imporoved typology of cutting and packing problems. *European Journal of Operational Research, 183*(3), str. 1109-1130.

338. Wegener, I. (2005). *Complexity Theory: Exploring the Limits of Efficient Algorithms*. Heidelberg: Springer-Verlag, 308 str.

339. Wieland, A., & Wallenburg, C. M. (2011). *Supply-Chain-Management in stürmischen Zeiten*. Berlin, 19 str.

340. Wilson, R. C. (1964). A review of facility design models. *The Journal of Industrial Engineering, 15*, str. 115-121.

341. Winter, D. (2013). *Abstract Definitions and Examples of Graphs*. Retrieved. from http://www.math.lsa.umich.edu/mmss/coursesONLINE/graph/graph2/index.html.

342. WIPO. (2011). *World Intellectiual Property Report. The changing face of innovation.* Geneva: World Intellectual Property Organisation, 186 str.

343. Wolfram, S. (2002). *A New Kind of Science*. Champaign, IL: Wolfram Media.

344. Wong, S. Y. S., & Chan, C. C. K. (2011). Method for automatic generation of optimal space frame. *UNited States Patent Office, št. patenta: 8050894.*

345. Wu, D., & Xia, H. (2012). A Multi-processor System Real-Time Scheduling Algorithm for Flight Assignment Problem. *Recent Advances in Computer Science and Information Engineering. Lecture Notes in Electrical Engineering, 126*, str. 507-514

346. Wu, S.-J., & Chow, P.-T. (1995). Genetic algorithms for nonlinear mixed discrete-integer optimization problems via meta-genetic parameter optimization. *Engineering Optimization, 24*(3), str. 137-159.

347. Xiao-Dan Liu, Jia-Ze Wu, & Zheng, C.-W. (2012). KD-tree based parallel adaptive rendering. *The Visual Computer, 28*(6-8), str. 613-623.

348. Xu, Z. (2012). A strongly polynomial FPTAS for the symmetric quadratic knapsack problem. *European Journal of Operational Research, 218*(2), str. 377-381.

349. Xu, Z. (2013). The knapsack problem with a minimum filling constraint. *Naval Research Logistics (NRL), 60*(1), str. 56-63.

350. Ylitalo, J. (2011). Beam forming method, apparatus and system. *European Patent Office, št. patenta: EP 2342834 A1*.

351. Zachariadis, E. E., Tarantilis, C. D., & Kiranoudis, C. T. (2012). The Pallet-Packing Vehicle Routing Problem. *Transportation Science, 46*(3), str. 341-358.

352. Zhang, C., & Wang, H.-P. (1993). Mixed-discrete nonlinear optimization with simulated annealing. *Engineering Optimization, 21*(4), str. 277-291.

353. Zhang, Z., Qin, H., Zhu, W., & Andrew, L. (2012). The single vehicle routing problem with toll-by-weight scheme: A branch-and-bound approach. *European journal of operational research 220*(2), str. 295-304.

354. Zhao, C., & Li, X. (2013). Approximation algorithms on 0–1 linear knapsack problem with a single continuous variable. *Journal of Combinatorial Optimization, Sprejet v objavo*.

355. Zheng, W., Ren, P., Ge, P., Qiu, Y., & Liu, Z. (2012). Hybrid heuristic algorithm for two-dimensional steel coil cutting problem. *Computers & Industrial Engineering, 62*(3), str. 829-838.

356. Zhu, W., Huang, W., & Lim, A. (2012). A prototype column generation strategy for the multiple container loading problem. *European Journal of Operational Research, 223*(1), str. 27-39.

VIRI

1. 23rd Conference on Operational Research. EURO XXIII Bonn. Conference Programme. 5-8. julij 2009. 354 str.
2. 24th Conference on Operational Research. EURO XXIV Lisbon. Conference Programme. 11-14. julij 2010. 352 str.
3. 25th Conference on Operational Research. EURO XXV Vilnius. Conference Programme. 8.-11. julij 2012. 348 str.
4. American mathematical society: Bin packing. 1.1.2013.
   [http://www.ams.org/samplings/feature-column/fcarc-bins2]
5. Bilkent University. Department of industrial engineering: Research areas. 1.1.2013.
   [http://www.ie.bilkent.edu.tr/en/graduate/researchareas.html]
6. Dictionary of Algorithms and Data Structures: Big O notation. National Institute of Standards and Technology (NIST). 1.1.2013.
   [http://xlinux.nist.gov/dads]
7. Encyclopedia Britanica, 1.1.2013.
   [http://www.britannica.com]
8. Etymology dictionary, 1.1.2013.
   [http://www.britannica.com]
9. European Patent Office. 1.1.2013.
   [http://www.epo.org/]
10. Google Scholar: *Computers and intractability*. 1.1.2013.
    [http://scholar.google.com/scholar?q=garey+and+johnson+1979+&btnG=&hl=en&as_sdt=0%2C5]
11. Google Scholar: *Reducibility Among Combinatorial Problems*. 1.1.2013.
    [http://scholar.google.com/scholar?hl=en&q=Reducibility+Among+Combinatorial+Problems&btnG=&as_sdt=1%2C5&as_sdtp=]
12. Islovar. 1.1.2013.
    [http://www.islovar.org]
13. Journal on Discrete Optimization. Elesevier. 1.1.2013.
    [http://www.sciencedirect.com/science/journal/15725286]
14. Nobelprize.org. The official web site of the Nobel prize. 1.1.2013.
    [http://www.nobelprize.org/nobel_prizes/lists/all/]

15. Stanford Encyclopedia of Philosophy: The algebra of logic tradition. 1.1.2013
[http://plato.stanford.edu/entries/algebra-logic-tradition/]

16. United States Patent Office. 1.1.2013.
[http://www.uspto.gov/]

17. Web of Knowledge. 28.2.2013.
[www.webofknowledge.com]

18. Wolfram Mathematica: packing problems. 1.1.2013
[http://www.wolframalpha.com/examples/PackingProblems.html]

19. World Intellectual Property Organisation (WIPO). 1.1.2013
[http://www.wipo.int/portal/index.html.en]